

# Евразийский Союз Ученых. Серия: технические и физико-математические науки

Ежемесячный научный журнал  
№ 3 (106)/2023 Том 2

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**Макаровский Денис Анатольевич**

AuthorID: 559173

Заведующий кафедрой организационного управления Института прикладного анализа поведения и психолого-социальных технологий, практикующий психолог, специалист в сфере управления образованием.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Штерензон Вера Анатольевна**

AuthorID: 660374

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт новых материалов и технологий (Екатеринбург), кандидат технических наук

**Синьковский Антон Владимирович**

AuthorID: 806157

Московский государственный технологический университет "Станкин", кафедра информационной безопасности (Москва), кандидат технических наук

**Штерензон Владимир Александрович**

AuthorID: 762704

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт фундаментального образования, Кафедра теоретической механики (Екатеринбург), кандидат технических наук

**Зыков Сергей Арленович**

AuthorID: 9574

Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, Отдел теоретической и математической физики, Лаборатория теории нелинейных явлений (Екатеринбург), кандидат физ-мат. наук

**Дронсейко Виталий Витальевич**

AuthorID: 1051220

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Кафедра "Организация и безопасность движения" (Москва), кандидат технических наук

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна. Материалы публикуются в авторской редакции.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Художник: Валегин Арсений Петрович  
Верстка: Курпатова Ирина Александровна

Адрес редакции:  
198320, Санкт-Петербург, Город Красное Село, ул. Геологическая, д. 44, к. 1, литера А  
E-mail: [info@euroasia-science.ru](mailto:info@euroasia-science.ru) ;  
[www.euroasia-science.ru](http://www.euroasia-science.ru)

Учредитель и издатель ООО «Логика+»  
Тираж 1000 экз.

# СОДЕРЖАНИЕ

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

*Рябинина Н.В., Шайдурова Г.И.*

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
НОВОГО ВЫСОКОКРЕМНЕЗЁМИСТОГО  
НЕТОКСИЧНОГО МАТЕРИАЛА РАСШИРЕННОГО  
СПЕКТРА НАЗНАЧЕНИЯ .....3

*Саушин И.И.*

УСЛОВИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ВТОРИЧНЫХ БРЫЗГ ПРИ  
УДАРЕ КАПЛИ О ЖИДКОСТЬ С ЖИДКОЙ ПЛЕНКОЙ 7

*Суздальский Д.А.*

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОДСИСТЕМЫ  
ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ.....11

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

*Березин Д.А.*

К ВОПРОСУ О МЕТОДАХ И УРОВНЯХ  
АССОРТИМЕНТНОГО АНАЛИЗА В СФЕРЕ В2В .....17

*Васильева О. А.*

О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДАННЫМИ НА  
ПЛОСКОСТЯХ СИЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ  
РЯДА УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В  
ПРОСТРАНСТВЕ  $R^3$ .....20

*Дрюков В.М.*

ВЫВОД ОСНОВНОГО ЗАКОНА АЭРОДИНАМИКИ ..22

*Неволин В.Г.*

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН  
ВЗРЫВНЫМ ИМПУЛЬСОМ .....26

*Новиков М.Д.*

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ  
ПРОГРАММ НА ЯЗЫКЕ ПАСКАЛЬ .....29

*Савельев В.П., Сулягина Н.И., Шамин А.А.*

ОБ ОДНОМ ЕСТЕСТВЕННОМ ПРОДОЛЖЕНИИ  
ЗНАМЕНИТОЙ ФОРМУЛЫ ФРОБЕНИУСА. ....32

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 699.812.2

УДК 699.866

---

### ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НОВОГО ВЫСОКОКРЕМНЕЗЕМНОГО НЕТОКСИЧНОГО МАТЕРИАЛА РАСШИРЕННОГО СПЕКТРА НАЗНАЧЕНИЯ

---

**Рябина Н.В.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
(Россия, Пермь, 614013, ул. Академика Королёва, 15)  
аспирант кафедры механики композиционных материалов и  
конструкций аэрокосмического факультета.  
тел. +79026499093*

**Шайдурова Г.И.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Россия, Пермь, 614013, ул. Академика Королёва, 15),  
профессор кафедры механики композиционных материалов  
и конструкций аэрокосмического факультета, доктор технических наук, главный химик.*

### PHYSICAL AND MECHANICAL STUDIES OF A NEW HIGH-SILICA NON-TOXIC MATERIAL FOR AN EXTENDED SPECTRUM OF APPLICATIONS

**N.V. Ryabinina**

*Perm National Research Polytechnic University  
(Russia, Perm, 614013, Akademika Koroleva str., 15)  
post-graduate student of the Department of Mechanics of Composite Materials  
and Structures of the Aerospace Faculty.  
tel. +79026499093*

**G.I. Shaydurova**

*Perm National Research Polytechnic University  
(Russia, Perm, 614013, Akademika Koroleva St., 15),  
Professor of the Department of Mechanics of Composite Materials  
and Structures of the Aerospace Faculty, Doctor of Technical Sciences, Chief Chemist*

#### АННОТАЦИЯ

Представлены испытания на прочность материала расширенного спектра назначения, который относится к технологии производств нетоксичных высококремнезёмистых теплоизоляционных и огнестойких материалов. Достижения научно-технического прогресса в области создания космических аппаратов, компьютерной техники, энергонагруженных производств характерны для современного мира, техника требует максимальной прочности, минимальной массы и высокой химической стойкости конструкционного материала. Именно этим требованиям в большей степени, чем традиционные (металлы), удовлетворяют композиционные материалы. Создание композиций с высоким содержанием кремния перспективно для создания нетоксичных материалов, огнестойких в течение длительного времени, что исключительно актуально в настоящее время для эксплуатации расширенного спектра назначения. Значительное место принадлежит кремнийсодержащим образованиям.

#### ABSTRACT

The paper presents strength tests of a material with an extended spectrum of purposes, which relates to the production technology of non-toxic high-silica heat-insulating and fire-resistant materials. Achievements of scientific and technological progress in the field of creating spacecraft, computer technology, energy-loaded industries are characteristic of the modern world, technology requires maximum strength, minimum weight and high chemical resistance of the structural material.

It is precisely these requirements that composite materials satisfy to a greater extent than traditional (metals). The creation of compositions with a high silicon content is promising for the creation of non-toxic materials that are fire resistant for a long time, which is extremely important at present for the operation of an extended range of purposes. A significant place belongs to silicon-containing formations.

**Ключевые слова:** огнестойкость, прочность, плотность, жидкое стекло.

**Keywords:** fire resistance, strength, density, liquid glass.

#### Введение

Среди большого разнообразия теплоизоляционных изделий из органического сырья наибольший интерес представляют плиты

древесноволокнистые, камышитовые, фибролитовые, торфяные, пробковая теплоизоляция натуральная, а также теплоизоляционные пенопласты. Плиты

древесноволокнистые применяют для тепло- и звукоизоляции ограждающих конструкций. К органическим теплоизоляционным изделиям и материалам также относятся: арболитовые изделия, пенополивинилхлорид, пенополиуретан, пеноизол теплоизоляционный, мипора, пенополистирол, полиэтилен вспененный, фибролит, сотопласты и ячеистые пластмассы. Применяемые современные теплоизоляционные материалы в строительстве жилых и промышленных зданий, тепловых агрегатов и трубопроводов с целью минимизации тепловых потерь в окружающую среду должны обладать низкой теплопроводностью [1].

Применение теплоизоляционных материалов позволяет уменьшить толщину и массу как стен, так и других ограждающих конструкций, снизить расход основных конструктивных материалов, уменьшить транспортные расходы и, соответственно, снизить стоимость строительства [2]. Наряду с этим, при сокращении потерь тепла отапливаемых сооружений, уменьшается расход топлива на его обогрев. Многие теплоизоляционные материалы из-за высокой пористости обладают способностью поглощать звук, что позволяет использовать их также в качестве акустических материалов для борьбы с шумом.

#### Цель исследования

Исследование направлено на создание новых импортозамещающих рецептурных составов с содержанием кремния на уровне 90% и получение результатов физико-химических превращений при

высокотемпературном нагреве при долговременной или экстремальной эксплуатации различных агрегатов и конструкций. На основе поставленной цели была сформулирована задача исследования по разработке рецептурных составов с использованием кремнийсодержащих компонентов, которые в совокупности могут обеспечить максимальный эндоэффект.

#### Материал и методы исследования

Методы исследования представлены совокупностью химических, физико-химических, физических и механических способов испытаний, применяемых для контроля исходного сырья, материалов, промежуточных продуктов и готовой продукции.

Выбор метода исследования определяется потребностью производства и возможностями данного метода: необходимая чувствительность, быстрота выполнения испытаний, производственные условия и возможности, стоимость проведения работ, оценка эффективности [3].

Оценку технологических, физико-механических и специальных свойств высококремнезёмистого материала проводили по стандартным методикам для гипс полимерных плит [4].

Для проведения испытаний на прочность были подготовлены образцы, согласно ГОСТ 8462–85 (рисунок 1). Испытания проводились на прессе гидравлическом ПГМ-100МГ4.

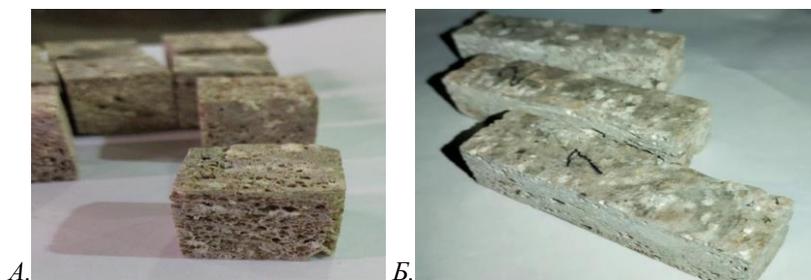


Рис. 1. Образцы для проведения испытаний:

А- на сжатие,

Б- на растяжение и изгиб.

#### Результаты исследования и их обсуждение

Определение физико-механических и специальных свойств высококремнезёмистого материала проводили по ГОСТ Р 58527-2019.

Исследования прочности на растяжение проводилась на испытательной машине Метротест РЭМ 50.

Протокол испытаний на растяжение представлен на рисунке 2.

**ПРОТОКОЛ ИСПЫТАНИЯ****Общие параметры испытания:**

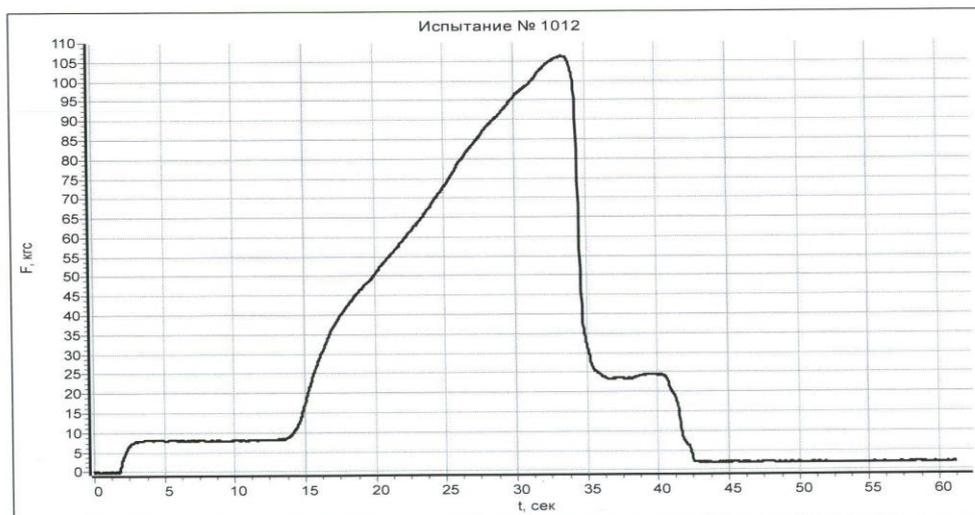
Тип испытания	Растяжение
Название группы	Испытание № 1012
Количество образцов	2
Материал	TFS-II
Тип сечения	Прямоугольник
Примечание	

**Параметры образца №1**

Расчетная длина, мм	90
Площадь сечения, см <sup>2</sup>	2,250

**Результаты испытания:**

Дата и время испытания	19.05.2022 17:58:51
Длительность испытания	00:01:01
Максимальная нагрузка, кгс	106,356
Максимальная деформация, мм	4,126
Предел прочности, кгс/см <sup>2</sup>	47,269

**Общие результаты по группе испытаний**

№	Расчетная длина, мм	Пл. сеч., см <sup>2</sup>	Дата и время	Макс. нагрузка, кгс	Макс. деформация, мм	Предел прочности, кгс/см <sup>2</sup>
1	90	2,250	19.05.2022 17:58:51	106,356	4,126	47,269
2	20	2,500	19.05.2022 18:11:01	61,795	0,596	24,718
Среднее значение				<b>84,1</b>	<b>2,4</b>	<b>36,0</b>

Рис. 2. Протокол испытания на растяжение

В таблице 1,2 представлены результаты испытаний на сжатие и на изгиб

Таблица 1

**Результаты испытаний на сжатие.**

№ образца	Линейные размеры, мм			Масса, м, г	Нагрузка, N, кН	Площадь, S, мм	Прочность на сжатие $R=N/S$ , $[Н]/[мм^2]=МПа$
	a	b	H				
31	24	23	23	12,38	3,17	552	<b>5,74</b>
32	23	23	24	12,12	2,66	529	<b>5,03</b>
33	24	23	23	12,60	4,95	552	<b>8,97</b>
34	23	23	24	12,58	4,18	529	<b>7,90</b>
35	24	24	24	13,34	4,18	576	<b>7,26</b>
36	24	23	24	12,35	2,84	552	<b>5,14</b>
37	24	24	24	11,99	3,27	576	<b>5,68</b>
38	24	24	23	11,98	5,01	576	<b>8,69</b>
Среднее	<b>23,75</b>	<b>23,375</b>	<b>23,625</b>	<b>12,42</b>	<b>3,783</b>	<b>555,25</b>	<b>7,05</b>

Таблица 2

## Результаты испытаний на изгиб.

№ образца	Линейные размеры, мм			Масса, м, г	Нагрузка, N, кН	Прочность на изгиб $R=3NL/2bH^2$ , [Н]/[мм <sup>2</sup> ]=МПа
	L	b	H			
1	81	21	21	34,34	0,71	<b>9,3</b>
2	81	21	21	33,61	0,66	<b>8,7</b>
3	81	21	22	35,09	0,89	<b>9,9</b>
<b>Среднее</b>	<b>81</b>	<b>21</b>	<b>21,3</b>	<b>34,35</b>	<b>0,75</b>	<b>9,6</b>

На основании таблицы варьирования и планирования экспериментов и определением характеристических показателей: прочность, технологичность, регулярность и устойчивое структурно-физическое состояние, теплофизика,

плотность, температуростойкость по результатам испытаний была определена оптимальная композиция для дальнейших технологических исследований, представленной в таблице 3.

Таблица 3

## Результаты испытаний

№ п/п	Показатели	Материал TFS-II
1	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	860...1000
2	Теплопроводность, (λ) Вт/(м·°C)	0,18...0,23
3	Предел прочности, МПа при:	
	сжатии	5,14...8,97
	изгибе	9,3...9,9
	растяжении	8,6...10
4	Влагопоглощение	0,1%
5	Усадка (0,8 мм на 1 м)	1,1
6	Скорость уноса (оплавления), мм/сек	0,00003
7	Плотность после воздействия t=1000 °C, (ρ) г/см <sup>3</sup> (кг/м <sup>3</sup> )	Менее 1,0
8	Скорость деструкции, мм/с	Менее 5
9	Структура после воздействия температуры	Стекло
10	Компонентный состав после воздействия температуры	Стекло
11	Толщина слоёв для обеспечения огнестойкости из расчёта на:	
	15 мин	3 мм
	45 мин	4 мм
	90 мин	5 мм
	120 мин	6 мм
	240 мин	10 мм
12	Остаточный ресурс, %	80

Анализ результатов, представленных в таблице 3 подтверждает, что вновь созданный материал обладает опережающим уровнем характеристик по огнестойкости, классу горючести и особенностям деструкции (оплавление). Следует отметить при этом высокий уровень влагостойкости.

Как показали результаты испытаний в специализированной лаборатории по методике испытаний на пожарную опасность, предусмотренной ГОСТ 31251—2008, вновь созданный теплоизоляционный огнестойкий высококремнезёмистый композит обладает негорючестью, согласно ГОСТ 30244-94 "Материалы строительные. Методы испытания на горючесть" (метод 1) (к классу пожарной опасности КМ), является огнестойким и экологически чистым материалом с широким спектром применения в различных отраслях промышленности [5, 7].

Физико-механические свойства полученного композитного продукта позволяют применять его в виде строительных блоков, обеспечивая возможность создания крупноблочных

конструкций или реализацию аддитивных технологий.

Физические свойства материала характеризуют конкретные особенности материала и его способности сопротивляться внешнему воздействию окружающей среды [6,8-10].

**Выводы**

Высококремнезёмистый материал относится к производству композитов теплоизоляционного назначения, способных удовлетворять требования эффективной тепло и огнезащиты различных энергетических установок, в производстве таких отраслей промышленности, как металлургия, строительство и многих других. Что позволяет обеспечить надёжную теплоизоляцию при ликвидации последствий при чрезвычайных ситуациях (пожар, возгорание и т.д.), защитные средства для формирований пожарных подразделений и др.

Результаты комплексных исследований подтвердили высокую эффективность технических параметров вновь разработанного материала, относящегося к классу негорючих огнестойких

покрытий, не выделяющих в условиях открытого пламени газообразных токсичных продуктов. Материал обладает высокой прочностью при сжатии и изгибе, низким влагопоглощением и высокой эррозионностойкостью в процессе деструкции имеет низкую плотность, высокую пористость, обладает низкой теплопроводностью, достаточной высокими механическими характеристиками

Высококремнезёмистый композит позволяет обеспечить технологическую независимость российских производителей от зарубежных поставщиков такого класса материалов и комплектующих.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аскадский А.А., Попов М.Н., Кондращенко В.И. //Физико-химия полимерных материалов и методы их исследования. М.: Издательский дом АСВ 2015. С. 105-120.

Иванов В.В., Алещенко В.И. // Перспективные материалы. 2000. № 2. С. 49-56.

Клименко Н. Н., Михайленко Н. Ю. Строительный материал на основе жидкого стекла и процессы его упрочнения // Мир технологий и технологий. 2012. № 7. С. 60-63.

Клименко Н. Н., Михайленко Н. Ю. Высококремнезёмистый композиционный материал строительного назначения на жидкостекольном связующем // Композиционные

материалы в промышленности. Сборник докладов 2014. С. 250-252.

Михайленко Н. Ю., Клименко Н. Н. Оптимизация технологических параметров синтеза высоко кремнезёмистых жидкостекольных композитов строительного назначения // Стекло и керамика. 2013. №5. С. 11-17.

Патент RU 2245861 РФ, МПК C04B28/26. Жидкостекольная композиция/ Ю.Г. Иващенко, Р.В. Фомин №2002130689/03; заявл. 15.11.2002; опубл. 10.02.2005// Бюл.2005. №4.

Рябинина Н. В., Шайдурова Г. И., Шевяков Я.С. Высококремнезёмистые композиционные материалы и покрытия широкого спектра назначения // Приоритетные направления развития науки и технологий доклады XXVI международной научно-практической конференции под общей редакцией В.М. Панарина. Сборник докладов. 2019. С. 3-6.

Соколов И. И. Сферопластики на основе терморезактивных связующих для изделий авиационной техники //М.: Автореферат. 2013.

Филимонов А.С., Тарасов В.А., Комков М.А., Моисеев В.А., Тимофеев М.П., Герасимов Н. В. Влияние связующих на свойства новых теплоизоляционных покрытий с использованием стеклянных микросфер // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. Сер. «Машиностроение» С. 185-192.

Справочник по композиционным материалам: в 2-х кн. Кн. 1 /Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. С. 448.

УДК 532.5

---

### УСЛОВИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ВТОРИЧНЫХ БРЫЗГ ПРИ УДАРЕ КАПЛИ О ЖИДКОСТЬ С ЖИДКОЙ ПЛЕНКОЙ

---

*Саушин И.И.*

*Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»,  
Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31*

### CONDITIONS FOR THE FORMATION OF SECONDARY SPATTERS WHEN IMPACT OF A DROP ON A LIQUID WITH A LIQUID FILM

*I. I. Saushin*

*Federal Research Center "Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences",  
Russia, 420111, Kazan, st. Lobachevsky, 2/31*

#### АННОТАЦИЯ

В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований процесса удара капли о поверхность жидкости с жидкой пленки, а именно результирующее влияние наличия пленки жидкости на выброс вторичной капли после удара. По результатам исследования показано, что наличие жидкой пленки может существенно повысить величины критических безразмерных чисел подобия задачи, при которых происходит образование брызг. Данные результаты можно использовать для реализации метода активного подавления вторичных брызг от удара капли о поверхность жидкости.

#### ABSTRACT

This paper presents the results of experimental studies of the impact of a drop on a liquid surface from a liquid film, namely the resulting effect of the presence of a liquid film on the ejection of a secondary drop after impact. According to the results of the study, it is shown that the presence of a liquid film can significantly increase the values of the critical dimensionless similarity numbers of the problem, at which splashing occurs. These results can be used to implement the method of active suppression of secondary splashes from the impact of a drop on a liquid surface.

**Ключевые слова:** удар одиночной капли о поверхность жидкости, устойчивость струи Релея, взаимодействие капли с жидкой пленкой, число Вебера.

**Keywords:** impact of a single drop on a liquid surface, Rayleigh jet stability, interaction of a drop with a liquid film, Weber number.

### Введение

Несмотря на свои малые масштабы, задача об ударе капли об поверхность жидкости или твердой поверхности имеет важное значение во многих научных и технических приложениях: аэрозольное охлаждение или покраска, термическое напыление [1], сепарация жидкости из газа, струйная печать [2], судебно-медицинская практика. При определенных условиях в результате удара капли о поверхность во внешнюю газовую среду выбрасываются единичные или множественные вторичные капли меньшего диаметра, которые могут вызывать существенные проблемы. Например, в газо-жидкостных сепараторах эти вторичные капли с меньшим числом Фруда ( $Fr$ ) могут быть унесены динамическим напором очищенного газа, снижая эффективность сепарации. В задачах струйной печати это снижает точность нанесения краски. Механические свойства термически напыленного покрытия также сильно зависят от кинематики удара капли [3]. По этой причине основной упор в подобных задачах сделан на определения критерий выброса вторичных капель в газовую среду, образования кратеров или так называемых корон.

К настоящему моменту времени для каждого класса на основе экспериментальных и численных исследований получены достаточно подробные карты режимов удара в координатах безразмерных числовых комплексов подобия. Эти результаты легли в основу инженерных нормативных рекомендаций при проектировании технических изделий, следуя которым для предотвращения образования брызг иногда приходится вынужденно снижать диаметр или скорость падающей капли, что искусственно занижает потенциальные характеристики оборудования. Для повышения или понижения порогового уровня критерия разбрызгивания может использоваться метод изменения давления газовой среды [4]. Очевидно, что это возможно лишь для герметичных систем, например, камеры сепаратора.

Последствия удара, а соответственно и условия появления брызг, существенно меняются, если рассматривать несмешивающиеся капельную и целевую жидкости, например, нефть и воду. Однако в литературе представлено крайне мало

подобных исследований. Более того, в этих исследованиях внимание уделено больше межфазной динамике несмешивающихся жидкостей [5-7], чем вопросу разбрызгивания вторичных капель в газовую среду.

### Цель исследования

Целью исследования является рассмотрение постановке задачи, описывающее падение капельной жидкости (дистиллированная вода) на пленку конечной толщины несмешивающейся целевой жидкости с меньшей плотностью (силиконовое масло), которая находится на поверхности резервуара с целевой жидкостью (дистиллированная вода). Данная постановка может быть использована как активная мера по борьбе с образованием вторичных капель, повышающей величины пороговых критериальных чисел подобия.

### Материал и методы исследования

Результаты исследования получены на экспериментальном стенде, схема которого представлена на рисунке 1. Межфазная граница между жидкостью 1 (дистиллированная вода, Таблица 1) и газом (атмосферный воздух, Таблица 1) реализована в круглой чашке Петри 3 диаметром 100 мм и толщиной 50 мм. Согласно [8] размеры такого резервуара более чем достаточны для низевелирования эффектов взаимодействия жидкости и стенок резервуара. В экспериментах при наличии жидкой пленки 2 в чашку Петри добавлялась вторая жидкость (силиконовое масло, Таблица 1), толщина пленки оценивалась по известной площади межфазной поверхности и измеренной массе добавленного масла. Генерация капель выполнялась с помощью шприцевого насоса 4 со сменяемыми иглами различного диаметра проходного сечения. Съемка процесса удара капли выполнялась высокоскоростной монохромной видеокамерой Fastec HiSpec 5 с разрешением каждого кадра  $300 \times 300$  пикселей, при частоте съемки  $f=5000$  1/с. Камера была оснащена светосильным объективом Navitar 1''F/0,95 с фокусным расстоянием 25 мм. Серии экспериментов выполнялись при комнатной температуре окружающего воздуха и используемых жидкостей.

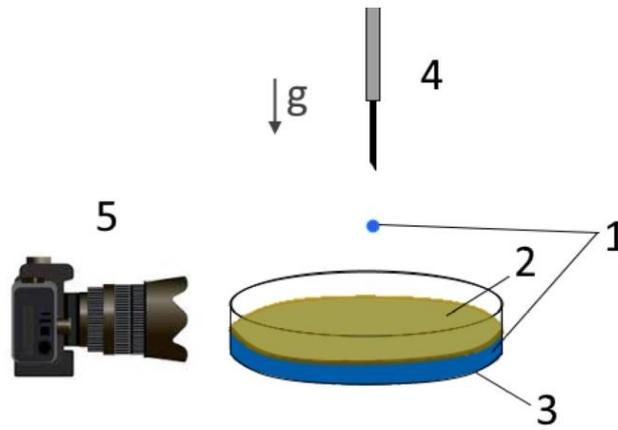


Рис. 1. Схема экспериментальной установки. 1 – основная жидкость; 2 – пленка вторичной жидкости; 3 – чашка Петри; 4 – шприцевой насос со сменными иглами; 5 - высокоскоростная цифровая видеокамера

Таблица 1

**Параметры экспериментальных исследований**

β	Силиконовое масло (жидкая пленка)							Вода		
	$v_o, \text{сСТ}$	$\rho_o, \text{кг/м}^3$	$\sigma_o, \text{Н/м}$	Fr	Re	We	Oh	$v_w, \text{сСТ}$	$\rho_w, \text{кг/м}^3$	$\sigma_w, \text{Н/м}$
0.1	100	965	0.021	10.26	24	186	0.573	1	1000	0.072
0.2	100	965	0.021	10.26	24	186	0.573	1	1000	0.072
0.2	10	910	0.0197	10.26	238	187	0.057	1	1000	0.072
0.5	10	910	0.0197	10.26	238	187	0.057	1	1000	0.072
3.0	10	910	0.0197	10.26	238	187	0.057	1	1000	0.072
3.0	50	960	0.02	10.26	48	194	0.293	1	1000	0.072
0.2	50	960	0.02	10.26	48	194	0.293	1	1000	0.072
1.1	50	960	0.02	10.26	48	194	0.293	1	1000	0.072
0.5	50	960	0.02	10.26	48	194	0.293	1	1000	0.072
0.8	50	960	0.02	10.26	48	194	0.293	1	1000	0.072
1.2	35	963	0.021	10.26	68	186	0.200	1	1000	0.072
1.0	35	963	0.021	10.26	68	186	0.200	1	1000	0.072
0.8	35	963	0.021	10.26	68	186	0.200	1	1000	0.072
0.5	35	963	0.021	10.26	68	186	0.200	1	1000	0.072
0.7	35	963	0.021	10.26	68	186	0.200	1	1000	0.072
0.5	75	963	0.021	10.26	32	186	0.429	1	1000	0.072
0.4	75	963	0.021	10.26	32	186	0.429	1	1000	0.072
1.6	20	950	0.021	10.26	119	183	0.114	1	1000	0.072
1.2	20	950	0.021	10.26	119	183	0.114	1	1000	0.072
1.4	20	950	0.021	10.26	119	183	0.114	1	1000	0.072

**Результаты исследования и их обсуждение**

В ходе выполнения экспериментального исследования было проведено 20 экспериментов в широком диапазоне безразмерной толщины

жидкой пленки и чисел подобия задачи (Фруда (Fr), Рейнольдса (Re), Вебера (We) и Онезорге (Oh)), Таблица 1, соотношения (1).

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{2Rg}}, \quad Re = \frac{\rho_o UR}{\mu_o}, \quad We = \frac{\rho_o U^2 R}{\sigma_o}, \quad Oh = \frac{\mu_o}{\sqrt{\sigma_o \rho_o R}}, \quad \beta = \frac{h}{2R}, \quad (1)$$

где: R – радиус капли, U – скорость капли в момент удара, ρ – плотность сплошной среды, σ – коэффициент поверхностного натяжения между сплошными средами, μ – коэффициент динамической вязкости сплошной среды, h – толщина жидкой пленки, ν – кинематическая вязкость сплошной среды, нижний индекс: «o» -

силиконовое масло, «w» - вода.

По результатам обработки высокоскоростной цифровой видеосъемки анализировался факт выброса вторичной капли в газовую среду, который происходил в результате известной потери устойчивости струи Релея, Рисунок 2.

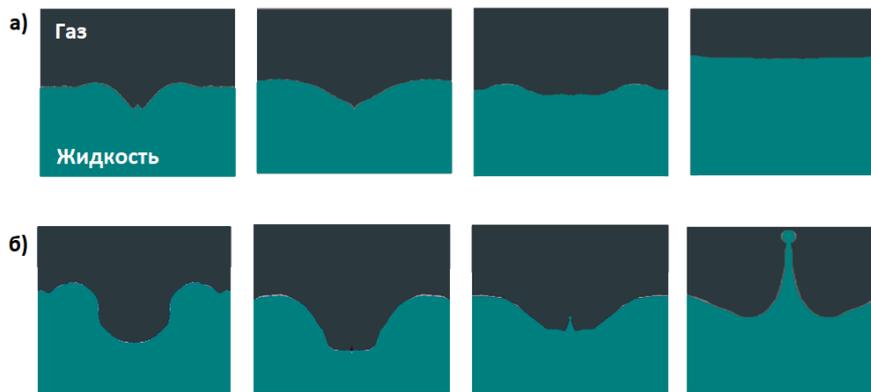


Рис. 2. Визуализация раскадровки цифровой скоростной видеосъемки динамики удара капли о поверхность жидкости; а) отсутствие выброса вторичной капли, б) образование струи Релея с последующим распадом и отделением вторичной капли в газовую среду.

Результаты экспериментов были нанесены на карту режимов в координатах отношения кинематических вязкостей жидкостей с безразмерной толщиной пленки жидкости и числа

Re с жидкостей с безразмерной толщиной пленки жидкости с указанием факта выброса вторичной капли в газовую среду, Рисунок 3.

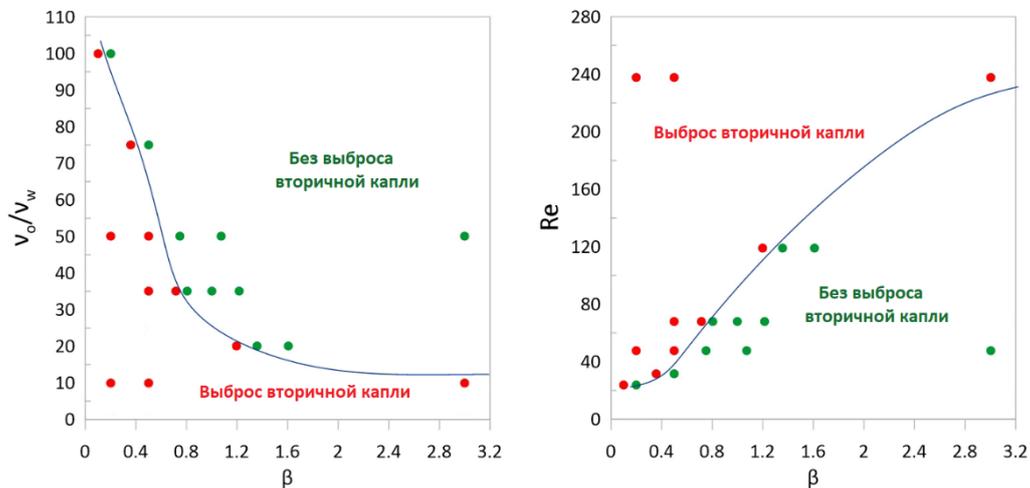


Рис. 3. Карта режимов удара капли о поверхность жидкости с жидкой пленкой.

### Заключение

По результатам исследования показано, что в качестве одной из возможных мер по борьбе с образованием выброса в газовую среду вторичных капель при падении капли жидкости на поверхность жидкости может быть использован метод искусственного формирования пленки из жидкости более малой плотности с большим коэффициентом кинематической вязкости. Предельной безразмерной толщиной  $\beta$  жидкой пленки является значение  $\beta \approx 3$ , выше которого пленка жидкости начинает вести себя как цельная жидкость. Наличие жидкой пленки позволяет почти на порядок увеличить критическое число Re капли при котором происходит выброс вторичной капли, Рисунок 3, и, соответственно, величину произведения скорости капли на её диаметр.

### Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского Научного Фонда (проект РНФ 21-79-00291).

### Список литературы

1. Aziz S. D., Chandra S. Impact, recoil and splashing of molten metal droplets //International journal of heat and mass transfer. 2000. Т. 43. №. 16. С. 2841-2857.
2. Lohse D. Fundamental fluid dynamics challenges in inkjet printing //Annual review of fluid mechanics. 2022. Т. 54. С. 349-382.
3. Vardelle M. et al. Influence of particle parameters at impact on splat formation and solidification in plasma spraying processes //Journal of Thermal Spray Technology. 1995. Т. 4. С. 50-58.
4. Engel O. G. Crater depth in fluid impacts //Journal of Applied Physics. – 1966. Т. 37. №. 4. С. 1798-1808.
5. Fujimatsu, T., Fujita, H., Hirota, M., & Okada, O. (2003). Interfacial deformation between an impacting water drop and a silicone-oil surface. Journal of colloid and interface science, 264(1), 212-220.
6. Shaikh S. et al. Immiscible impact dynamics of droplets onto millimetric films //Experiments in Fluids. 2018. Т. 59. С. 1-12.
7. Mohasan M. et al. Cavity dynamics of water

drop impact onto immiscible oil pool with different viscosity //Acta Mechanica Sinica. 2021. Т. 37. С. 447-455.

liquid pools: Rayleigh jet to formation of secondary droplets //Physical Review E. 2015. Т. 92. №. 5. С. 053022.

8. Castillo-Orozco E. et al. Droplet impact on deep

УДК 004.9

---

## АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОДСИСТЕМЫ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

---

*Суздальский Дмитрий Андреевич,*  
аспирант

*(РЭУ им. Г.В. Плеханова)*

*Научный руководитель Микрюков Андрей Александрович,*

*доцент кафедры ПИИБ, к.т.н., доцент*

*(РЭУ им. Г.В. Плеханова)*

### CURRENT ISSUES OF INFORMATION SECURITY PROBLEMS MODELING

#### АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматриваются подходы к решению задачи построения модели системы информационной безопасности (ИБ), которая относится к классу слабо структурированных и плохо формализуемых систем. Исследуются такие аспекты оценки параметров систем ИБ, как комплексность и неоднозначность оценки рисков систем ИБ, неоднозначность описания угроз активам субъектов экономической деятельности (СЭД) и их параметров. Вышеуказанные аспекты связаны с применением экспертных методов для анализа систем ИБ и оценки их рисков, а также, многообразием видов угроз ИБ информационным активам СЭД, что затрудняет исследование систем ИБ с использованием традиционных подходов.

В работе показано, что для решения задач анализа систем ИБ предпочтительно использовать когнитивные модели, так как они позволяют более полно учесть всё многообразие факторов, влияющих на степень эффективности применяемых систем ИБ.

В статье предложен гибридный метод когнитивного моделирования систем ИБ на основе когнитивных карт в комбинации с моделями нечёткого логического вывода, позволяющий оценить параметры угроз активам СЭД и систем ИБ в условиях большого количества неопределённостей.

В результате исследования обосновывается целесообразность построения комплексной модели системы поддержки принятия решений по управлению информационной безопасностью, обеспечивающей повышение эффективности на основе применения гибридных интеллектуальных технологий (нечёткой логики и когнитивных карт), а также методик реализации разработанной модели.

Новизна результатов определяется возможностью учета множества неопределённостей возникающих при описании угроз информационным активам СЭД и систем ИБ, характерными особенностями которой являются: сложность формального описания и сложность и даже невозможность структуризации объекта исследования

Практическая значимость предлагаемых решений заключается в возможности применения разработанного подхода при оценке рисков ИБ.

#### ABSTRACT

This paper discusses approaches to solving the problem of building an information security system (IS) model, which belongs to the class of weakly structured and poorly formalized systems. Such aspects of assessing the parameters of IS systems as the complexity and ambiguity of assessing the risks of IS systems, ambiguity in the description of threats to the assets of economic entities (EDS) and their parameters. The above aspects are related to the use of expert methods for analyzing IS systems and assessing their risks, as well as the variety of types of IS threats to EDMS information assets, which makes it difficult to study IS systems using traditional approaches.

The paper shows that it is preferable to use cognitive models to solve the problems of analyzing information security systems, since they allow to take into account more fully the whole variety of factors that affect the degree of efficiency of the applied information security systems.

The article proposes a hybrid method for cognitive modeling of information security systems based on cognitive maps in combination with fuzzy inference models, which makes it possible to assess the parameters of threats to EDMS assets and information security systems under conditions of a large number of uncertainties.

As a result of the study, the expediency of building an integrated model of a decision support system for information security management is substantiated, which provides an increase in efficiency based on the use of hybrid intelligent technologies (fuzzy logic and cognitive maps), as well as methods for implementing the developed model.

The novelty of the results is determined by the ability to take into account the many uncertainties that arise when describing threats to information assets of the EDMS and information security systems, the characteristic features of which are: the complexity of the formal description and the complexity and even the impossibility of structuring the object of study

The practical significance of the proposed solutions lies in the possibility of using the developed approach in assessing IS risks.

**Ключевые слова:** информационная безопасность, оценка рисков, когнитивное моделирование, нечёткая логика, нечёткий логический вывод.

**Keywords:** information security, risk assessment, cognitive modeling, fully logic, fuzzy inference.

#### Введение

В настоящее время, несмотря на наличие известных зарубежных и отечественных стандартов в области управления рисками нарушения информационной безопасности (ИБ), проблема оценки риска нарушения ИБ остается актуальной. В стандартах формулируются только критерии оценки безопасности, но не содержится методик оценивания и важных деталей, позволяющих проводить сравнительный анализ различных вариантов защиты информационных систем (ИС).

Известно также достаточно большое число программных продуктов, позволяющих автоматизировать расчет рисков нарушения ИБ. Они обладают определенными достоинствами и недостатками. Так, например, общим недостатком CRAMM, RiskWatch, ГРИФ является ориентация на этап эксплуатации систем защиты информации (СЗИ); кроме того, в средствах отсутствует возможность учесть данные об изменении технологии обработки информации на объекте защиты и факторах, влияющих на степень эффективности применяемых систем ИБ.

В целях нивелирования вышеуказанных недостатков традиционных подходов к оценке рисков ИБ широко применяются методы когнитивного моделирования процессов, происходящих в ИС и системах ИБ, на основе нечётких когнитивных карт (НКК) [1-2]. Результаты когнитивного моделирования процессов ИБ позволяют повысить общую адекватность оценок рисков ИБ за счёт комплексного учёта факторов, влияющих на них [2].

В то же время, учитывая во многом экспертный характер оценок рисков ИБ, целесообразно использование моделей оценки рисков ИБ, основанных на нейро-нечётком выводе. Такие модели позволяют не только комплексно учесть всё многообразие экспертных оценок рисков ИБ, но и агрегировать их для получения общей оценки степени эффективности ИБ, что невозможно сделать с использованием подходов, основанных на когнитивном моделировании процессов, протекающих в системах ИБ [3]. Таким образом, задача разработки гибридного метода

когнитивного моделирования систем ИБ на основе НКК в комбинации с моделями нечёткого логического вывода является актуальной.

Анализ существующих подходов к оценке рисков информационной безопасности

Проведённый анализ существующих подходов к оценке рисков информационной безопасности показал, что методы когнитивного подхода находят применение для моделирования процессов в системах ИБ и позволяют строить более адекватные модели оценки рисков ИБ.

В работе [4] рассматриваются вопросы оценки информационных рисков на основе когнитивного моделирования информационной системы. На наш взгляд, эти подходы могут оказаться очень эффективными для решения задач управления информационной безопасностью, что связано с...

В статье [5] изучается вопрос применения технологии когнитивного моделирования для решения задач анализа и управления информационными рисками и основные этапы когнитивного анализа. Однако, в работе недостаточно полно учитывается сильная зависимость результатов применения нечётких когнитивных карт (НКК) от уровня качества входной информации и её оценок, используемых в НКК, что может снизить эффективность когнитивного анализа, и\или снизить точность его результатов.

В статье [6] предложены методы построения моделей угроз с помощью НКК на основе сетевой политики безопасности. Рассмотренные в статье методы подразумевают построение матрицы разграничения прав доступа, матрицы несанкционированного доступа (НСД) к информационным объектам и матрицы утечек, выступающих в виде исходных данных для построения НКК, задавая входные и выходные концепты карты. Проведённый анализ показал, что когнитивный подход позволяет построить адекватную и более достоверную модель угроз ИБ СЭД. Пример построения НКК, отражающей возможные потери конкретного СЭД - вуза от воздействия различных угроз на его информационную систему, приведен на рисунке 1 [7].

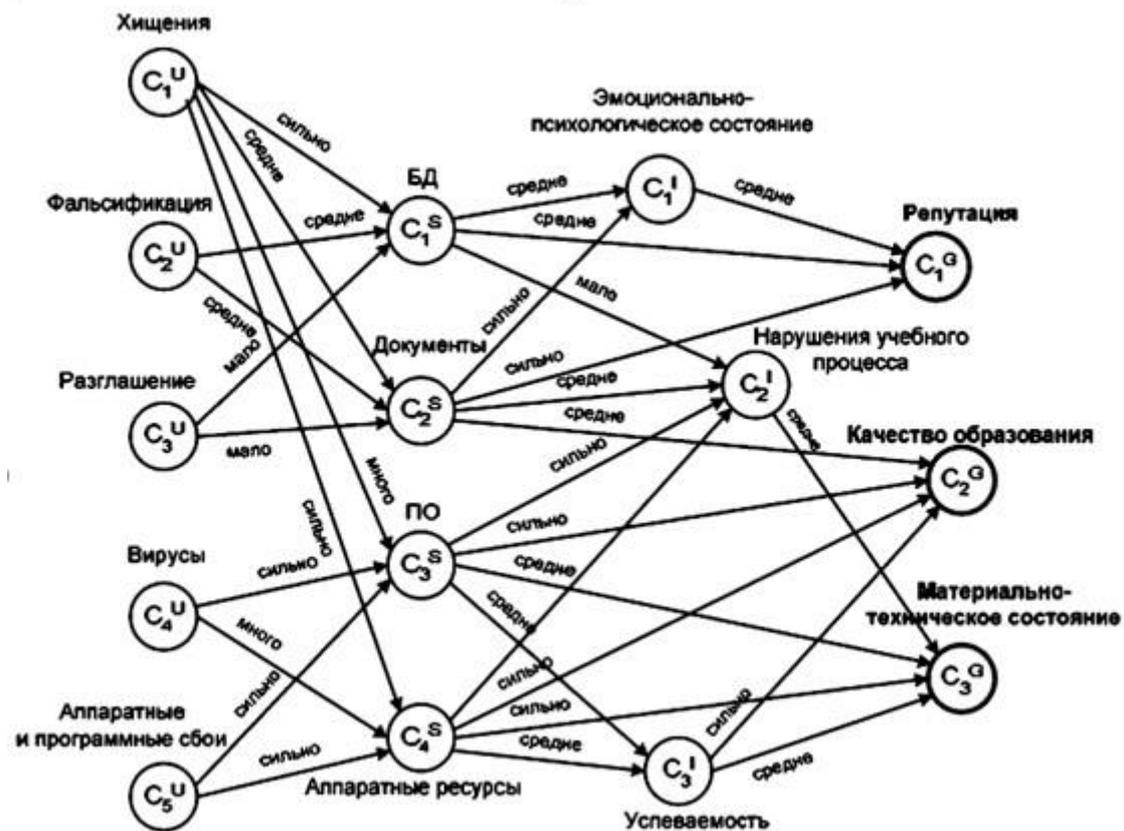


Рисунок 1. Нечёткая когнитивная карта для определения ущерба вузу в результате воздействия информационных угроз [Гузаиров М.Б., Васильев В.И., Кудрявцева Р.Т. Системный анализ информационных рисков вуза с применением нечетких когнитивных карт // Инфокоммуникационные технологии. 2007. Т.5. №4.]

Рисунок 1 иллюстрирует вариант определения степеней влияния факторов, связанных с различными угрозами ИБ СЭД, на информационные активы СЭД.

В книге [8] рассматриваются вопросы теории и практики когнитивного моделирования – метода исследования сложных слабоструктурированных процессов и систем.

В статье [9] рассматривается общая теория НКК и приводятся ключевые характеристики систем, создаваемых на основе методов моделирования НКК (плотность, исходящая, входящая и общая центральность, соотношение числа переменных-приемников и переменных-передатчиков, индекс иерархии), что обуславливает применение методов моделирования НКК для оценки влияния факторов на уровень обеспечения и управления ИБ.

В статье [10] рассматриваются архитектура и функциональные характеристики многопользовательской системы поддержки принятия решений на основе нечетких когнитивных моделей «ИГЛА». Анализ вышеуказанной системы показал, что она может быть использована для построения НКК оценки влияния факторов на уровень обеспечения и управления информационной безопасностью, в силу наличия в ней функций поддержки

согласования мнений экспертов и динамического моделирования.

В работе [11] предложена методика анализа рисков информационной безопасности с использованием нечёткой логики, реализованная на базе инструментария Matlab, позволяющая комплексно оценить риски информационной безопасности с учётом влияния информационных угроз на получаемые оценки. Анализ показал, что оценка рисков ИБ с использованием методов, основанных на нечёткой логике, позволяет более точно оценить факторы, влияющие на уровень защищённости информационного обеспечения СЭД. Однако, в силу экспертности таких оценок, они могут быть подвержены человеческому фактору и должны применяться в совокупности с методами статистического анализа и групповых оценок.

В статье [12] предложена нечеткая модель оценки рисков информационной безопасности и поддержки уровня защищенности ERP-систем с использованием лингвистического подхода к описанию факторов оценок рисков ИБ СЭД, позволяющая оценить влияние факторов на оценки рисков ИБ СЭД, учитывая качественный, неточный и во многом не определенный или неполный характер информации о большинстве факторов. Анализ показал, что используемый в статье подход позволяет существенно повысить точность

получаемых оценок рисков ИБ за счёт более полного учёта факторов, влияющих на них.

Результаты анализа методов когнитивного моделирования и методов нечёткого логического

вывода применительно к задаче анализа факторов, влияющих на состояние ИБ СЭД, представлены в таблице 1.

Таблица 1.

**Результаты сравнительного анализа методов когнитивного моделирования и методов нечёткого логического вывода**

№ п/п	Наименование метода	Преимущества метода	Недостатки метода
1	Метод построения	Возможность получения точных	Сложность агрегации полученных оценок для
№ п/п	Наименование метода	Преимущества метода	Недостатки метода
	моделей угроз с помощью НКК	оценок степеней влияния факторов на состояние ИБ СЭД	отражения общего уровня влияния факторов на степень защищённости СЭД от информационных угроз
2	Метод анализа рисков информационной безопасности с использованием нечёткой логики	Возможность агрегации полученных частных оценок рисков ИБ	Высокая чувствительность метода к корректности точечных оценок Высокая степень влияния человеческого фактора на агрегированную оценку

Анализ современных научных информационных источников и данных, представленных в таблице 1, показал, что методы когнитивного моделирования факторов, влияющих на оценки рисков ИБ СЭД позволяют уточнить существующие оценки рисков ИБ СЭД за счёт комплексности учёта факторов, влияющих на состояние ИБ СЭД. Вышеуказанные методы с успехом применяются для решения задач оценки рисков ИБ. Гибридизация методов когнитивного моделирования и методов нечёткой логики, применительно к задачам оценки рисков ИБ, как правило, позволяет устранить недостаток подхода, основанного на когнитивном моделировании заключающийся в сложности агрегации полученных частных оценок ИБ СЭД, за счет применения подхода, основанного на нечёткой логике, позволяющего агрегировать полученные частные оценки рисков ИБ. При этом, результаты моделирования угроз ИБ с помощью НКК являются входными данными для нечёткой модели анализа рисков ИБ СЭД. Например, в [13] предложен гибридный подход к прогнозированию временных рядов, основанный на применении нейро-нечётких прогнозных моделей и НКК. Эти методы позволяют более точно предсказывать состояния объектов, что позволяет успешно использовать их для оценки рисков ИБ СЭД в реальном масштабе времени. Однако, существенным недостатком вышеуказанных моделей является их высокая чувствительность к исходным данным, что снижает эффективность их применения для анализа большого количества разнообразных количественных и качественных факторов, влияющих на состояние ИБ СЭД. Для решения этой задачи целесообразна разработка и применение гибридного метода когнитивного моделирования систем информационной безопасности, менее чувствительного к исходным данным.

Также следует отметить, что, вышеуказанные методы не позволяют получить общую оценку уровня защищённости информационных активов СЭД от информационных угроз. Для решения этой задачи можно применить методы нечёткого логического вывода, позволяющие агрегировать полученные ранее оценки влияния факторов на оценки рисков ИБ СЭД.

В работе [14] показано, что применение гибридной модели оценки рисков в ИС позволяет снизить время, требуемое для выработки управляющих воздействий на компоненты системы. Это позволяет существенно повысить оперативность принятия решений на управление ИС в целом, и систем ИБ, в частности.

В статье [15] утверждается, что процесс оценки рисков является периодическим, что связано с динамичностью средств и систем информатизации СЭД и проявляется в необходимости периодической переоценки рисков ИБ. Такой характер процессов оценки рисков ИБ обуславливает необходимость разработки гибридного метода когнитивного моделирования систем информационной безопасности, позволяющего не только получать точные оценки рисков ИБ с учётом факторов, влияющих на них, но и агрегировать полученные оценки с достаточной степенью точности и достоверности для получения общей оценки уровня качества ИБ СЭД. Такая оценка может быть использована для повышения качества принимаемых решений на управление ИБ СЭД.

Концептуальный подход к решению задачи построения гибридной модели систем информационной безопасности

Предложенный гибридный метод когнитивного моделирования систем информационной безопасности основан на совместном применении методов когнитивного

моделирования и нечёткого логического вывода. Концептуальная схема предлагаемого гибридного метода когнитивного моделирования систем

информационной безопасности представлена на рисунке 2.

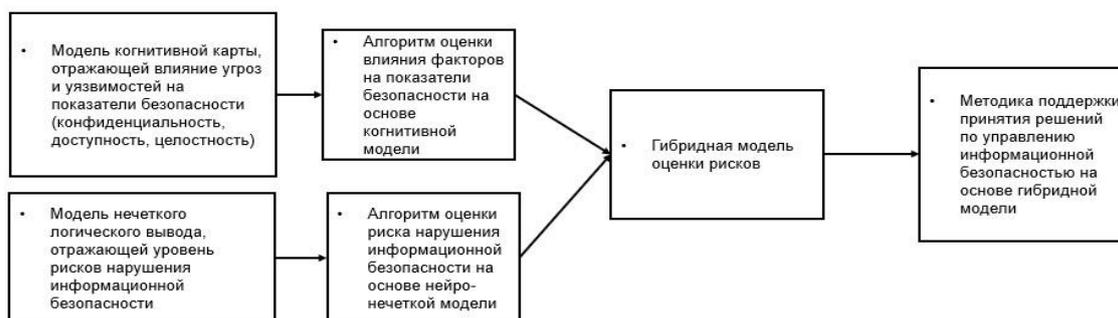


Рисунок 2. Концептуальная схема предлагаемого гибридного метода когнитивного моделирования систем информационной безопасности

Согласно рисунку 2, концептуальная схема гибридной модели включает следующие компоненты:

Разработка модели когнитивной карты, отражающей влияние угроз и уязвимостей на показатели ИБ СЭД;

Разработка алгоритма оценки влияния факторов на показатели ИБ СЭД на основе разработанной когнитивной модели;

Разработка модели нечеткого логического вывода, отражающей уровень рисков нарушения ИБ СЭД;

Разработка алгоритма оценки риска нарушения ИБ СЭД на основе нейро-нечеткой модели логического вывода;

Разработка гибридной модели оценки рисков ИБ СЭД;

Разработка методики поддержки принятия решений по управлению информационной безопасностью на основе гибридной модели.

В результате разработки и применения гибридной модели оценки рисков ИБ СЭД ожидается получение комплексной модели системы поддержки принятия решений по управлению информационной безопасностью СЭД.

Гибридный метод когнитивного моделирования систем информационной безопасности позволяет существенно повысить уровень защищённости СЭД от информационных угроз за счёт построения и последующего применения когнитивных карт, используемых для получения более точных оценок влияния факторов на состояние информационной безопасности СЭД, с одной стороны, и применения методов нечёткого логического вывода, служащих для агрегации полученных ранее оценок влияния факторов на состояние ИБ СЭД, с другой стороны. Комбинация вышеуказанных методов также позволит снизить чувствительность метода к исходным данным по сравнению с существующими методами когнитивного моделирования факторов, влияющих на оценку рисков ИБ СЭД. Полученная агрегированная оценка рисков ИБ СЭД, учитывающая влияние факторов на состояние ИБ СЭД, может быть использована для повышения

качества принимаемых решений на управление ИБ СЭД.

**Заключение**

В работе проведён анализ существующих подходов к анализу рисков информационной безопасности на основе когнитивного моделирования и нечёткой логики. В результате анализа установлено, что методы когнитивного моделирования факторов, влияющих на оценки рисков ИБ СЭД позволяют уточнить существующие оценки рисков ИБ СЭД за счёт комплексности учёта факторов, влияющих на состояние ИБ СЭД. Однако, вышеуказанные методы не позволяют повысить качество принимаемых решений на управление ИБ СЭД. Для решения этой задачи можно применить методы нечёткого логического вывода, позволяющие агрегировать полученные ранее оценки влияния факторов на оценки рисков ИБ СЭД. Полученная агрегированная оценка влияния факторов на состояние ИБ СЭД может быть использована для повышения качества принимаемых решений на управление ИБ СЭД.

#### Список использованной литературы

Микрюков А.А., Усцелемов В.Н. Построение подсистемы информационной безопасности на основе прецедентного подхода // Научное обозрение. 2013. №12. С. 227-230 URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21219138> (дата обращения: 02.03.2023).

Микрюков А.А. Когнитивные технологии в системах поддержки принятия решений в цифровой экономике // Инновации и инвестиции. 2018. №6. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kognitivnye-tehnologii-vsistemah-podderzhki-prinyatiya-resheniy-v-tsifrovoy-ekonomike> (дата обращения: 02.03.2023).

Микрюков А.А., Усцелемов В.Н. Модель оценки степени риска информационных угроз в инфокоммуникационных системах на основе нейро-нечеткого вывода // Научное обозрение. 2013. №12. С. 219-222 URL:

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21219136> (дата обращения: 02.03.2023).

Васильев В. И., Кудрявцева Р. Т., Юдинцев В. А. Автоматизация процесса оценки информационных рисков с использованием нечетких когнитивных карт // Вестник УГАТУ = Vestnik UGATU. 2014. №3 (64). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/avtomatizatsiya-protssesa-otsenkiinformatsionnyh-riskov-s-ispolzovaniem-nechetkih-kognitivnyh-kart> (дата обращения: 02.02.2023).

Васильев В. И., Вольфин А. М., Кудрявцева Р. Т. Анализ и управление рисками информационной безопасности с использованием технологии когнитивного моделирования // Доклады ТУСУР. 2017. №4. URL:

<https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-i-upravlenie-riskamiinformatsionnoy-bezopasnosti-s-ispolzovaniem-tehnologii-kognitivnogomodelirovaniya> (дата обращения: 02.02.2023).

Гузаиров М. Б., Машкина И. В., Степанова Е. С. Построение модели угроз с помощью нечетких когнитивных карт на основе сетевой политики безопасности // Безопасность информационных технологий. 2011. Т.18. №2 URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18810948> (дата обращения: 02.02.2023).

Гузаиров М.Б., Васильев В.И., Кудрявцева Р.Т. Системный анализ информационных рисков вуза с применением нечетких когнитивных карт // Инфокоммуникационные технологии. 2007. Т.5. №4.

Мальцев В.А. Теория и практика когнитивного моделирования социально-экономических и политических процессов [Текст]: учебнометодическое пособие / [В. А. Мальцев и др.]; Волго-Вятская акад. гос. службы. - Нижний Новгород: Изд-во Волго-Вятской акад. гос. службы, 2010. - 80 с.: ил., табл.; 20 см.; ISBN 978-5-85152-823-1

Заграновская А. В. Системный анализ на основе нечетких когнитивных карт // Вестник РЭА им. Г. В. Плеханова. 2018. №4 (100). URL: [https://cyberleninka.ru/article/n/sistemnyy-analiz-na-](https://cyberleninka.ru/article/n/sistemnyy-analiz-na-osnove-nechetkih-kognitivnyh-kart)

[osnove-nechetkihkognitivnyh-kart](https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21219136) (дата обращения: 02.02.2023).

Гулаков В.К., Подвесовский А.Г., Лагерев Д.Г. Система поддержки принятия решений на основе когнитивного моделирования «игла» // Программные продукты и системы. 2007. №3. URL:

<https://cyberleninka.ru/article/n/sistema-podderzhki-prinyatiya-resheniy-na-osnove-kognitivnogo-modelirovaniya-igla> (дата обращения: 02.02.2023).

Баранова Е. К., Гусев А. М. Методика анализа рисков информационной безопасности с использованием нечёткой логики на базе инструментария Matlab // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. №1 (13). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-analiza-riskovinformatsionnoy-bezopasnosti-s-ispolzovaniem-nechotyokoy-logiki-na-bazeinstrumentariya-matlab> (дата обращения: 21.02.2023).

Корнев Л. В. Нечеткая модель оценки рисков информационной безопасности и поддержки уровня защищенности ERP-систем / Л. В. Корнев. // Молодой ученый. — 2021. — № 27 (369). — С. 48-54. — URL: <https://moluch.ru/archive/369/83061/> (дата обращения: 21.02.2023).

Yarushev S., Averkina A. Hybrid approach for time series forecasting based on ANFIS and Fuzzy Cognitive Maps / Proceedings of 2017 20th IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM 2017). St. Petersburg, 2017. Pp. 379-381.

Микрюков А.А., Усцелемов В.Н. Гибридная модель оценки рисков в информационных системах // Прикладная информатика. 2014. №1 (49). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/gibridnaya-model-otsenki-riskov-v-informatsionnyh-sistemah> (дата обращения: 02.03.2023).

Садриева А.С. Методы нечеткой логики в оценке рисков информационной безопасности // Материалы IX Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум» URL: <https://scienceforum.ru/2017/article/2017039603> (дата обращения: 21.02.2023).

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 338.2

## К ВОПРОСУ О МЕТОДАХ И УРОВНЯХ АССОРТИМЕНТНОГО АНАЛИЗА В СФЕРЕ B2B

*Березин Д.А.**студент кафедры «Менеджмент и маркетинг» ОмГУ им. Ф.М. Достоевского  
группа ЭММ 031-3-05*

### TO THE QUESTIONS OF METHODS AND LEVELS OF ASSORTMENT ANALYSIS IN THE FIELD OF B2B

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.106.2.1779

#### АННОТАЦИЯ

Цель статьи – дать характеристику ключевым моментам, связанным с подготовкой и проведением анализа ассортимента продукции предприятия b2b на примере компании «Гринавто» таким образом, чтобы это помогло специалистам по маркетингу при проведении ассортиментного анализа предприятия. Основываясь на теоретической базе предоставить материал, который можно было использовать и в практической деятельности. В данной статье указывается на необходимость не только использовать определенный набор методов при проведении анализа ассортимента компании, но и готовиться к проведению анализа ассортимента, учитывая формальные этапы, специфику отрасли, необходимость принятия решений на определенном уровне, необходимость проведения предварительной работы.

#### ANNOTATION

The purpose of the article is to characterize the key points related to the preparation and analysis of the product range of a b2b enterprise using the example of the Greenauto company in such a way that it will help marketing specialists when conducting an assortment analysis of an enterprise. Based on a theoretical basis, provide material that could be used in practice. This article points out the need not only to use a certain set of methods when analyzing the assortment of a company, but also to prepare for an analysis of the assortment, taking into account the formal stages, the specifics of the industry, the need for decision-making at a certain level, the need for preliminary work.

**Ключевые слова.** Ассортимент продукции, анализ ассортимента, ассортиментная политика, предприятие b2b.

**Key words:** Product range, assortment analysis, assortment policy, b2b company.

Анализ ассортимента продукции на предприятии b2b – это сложная и ответственная задача, стоящая перед специалистами компании. Правильно выполненный анализ ассортимента благоприятно сказывается на повышении эффективности отдела маркетинга и отдела продаж компании.

При этом специалисты по маркетингу, в первые столкнувшиеся с подобной задачей, могут испытывать сложности при ее решении. Несколько простых иллюстраций, подкрепляющих теорию, возможно, облегчат понимание того как этот вопрос решается на практике и прояснит ряд наиболее часто встречающихся затруднений.

Под эффективностью в данном случае понимается получение максимального результата с минимальными затратами [11]

В фактическом выражении это может быть рост продаж при текущих расходах или уменьшение расходов при текущих продажах, рост прибыльности, повышение качества управленческих решений (для оценки данного параметра необходимо разработать систему контроля и оценки качества таких решений).

Основные методы анализа ассортимента на предприятии [11]:

Сравнение – сравнение фактических данных по товарообороту с плановыми значениями и значениями предыдущих периодов

Факторный анализ – методика комплексного и системного изучения и измерения воздействия факторов на величину результативных показателей

Способ цепной подстановки – позволяет определить влияние отдельных факторов на изменение величины результативного показателя путем постепенной замены базисной величины каждого факторного показателя в объеме результативного показателя на фактическую в отчетном периоде

Индексный подход – основан на относительных показателях динамики, выражающих отношение фактического уровня анализируемого показателя в отчетном периоде к его уровню в базисном периоде

Способ абсолютных разниц – используется для расчета влияния факторов на прирост результативного показателя

Построение динамических рядов – представляет последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень развития товарооборота (абсолютный прирост, темпы роста, темпы прироста)

Построение трендовых и регрессивных моделей – представляют собой сочетание качественного экономического анализа с формализованными математическими процедурами

Анализ структуры чеков – его проводят для оценки эффективности выкладки товара на полках магазина, размещения товара в интернет-магазине компании или представления продукции на сторонних ресурсах

Анализ структуры товарооборота и маржинального дохода (ABC-анализ) – один из наиболее популярных видов анализа, показывающий перечень продукции, приносящий наибольший доход (и, соответственно, перечень продукции, обеспечивающий среднюю и наименьшую долю продаж)

XYZ-анализ – который помогает оценивать и сравнивать стабильность продаж различных товарных групп или отдельных товаров

Анализ эластичности и эффективности торговых площадей – помогает оценить эффективность выкладки товара и более эффективно перераспределить места в торговом зале и на полках.

Нужно отметить, что недостаточно просто выбрать какой-либо метод анализа ассортимента продукции. Перед тем как провести аналитику ассортимента необходимо обратить внимание на то, что:

очень важно уметь правильно выбирать и грамотно (с соблюдением формальных этапов и учитывая поставленные цели и задачи) использовать наиболее подходящие для данной задачи инструменты

следовательно, необходимо проводить предварительную работу при подготовке анализа ассортимента продукции предприятия

учитывать специфику отрасли b2b: высокая техническая грамотность покупателей, применение продукции покупателями продукции компании для ведения собственного бизнеса (то есть продукция должна приносить прибыль клиентам компании), повышенная по сравнению с сегментом b2c сложность получения информации о рынке и покупателях продукции (из-за более узкого сегмента покупателей), повышенная по сравнению с сегментом b2c требовательность к ответственности менеджеров компаний, производящих и реализующих продукцию

делать выводы и рекомендации, не только учитывая формальные требования к анализу ассортимента предприятия (корректный выбор и использование инструментов для анализа ассортимента, исходя из поставленных при анализе целей и задач), но общие цели и задачи как компании в целом, так и направления маркетинга в частности.

При анализе ассортимента продукции компании нужно также помнить, что существуют несколько уровней принятия решений по ассортименту [13]:

корпоративный уровень, на котором принимаются решения с какими категориями и брендами работает компания

деловой уровень, на котором решается какой собственно ассортимент, необходимый отделу продаж по определенному направлению

функциональный уровень – здесь принимаются решения по наполнению категорий и ротации ассортимента: введение перспективных товаров, удаление (или сохранение в ассортименте если данная позиция по каким-либо причинам важна для сохранения уровня лояльности клиентов) низкоприбыльных и низкооборотных товаров

оперативный уровень – здесь принимаются решения по отдельным регионам или торговым точкам, то есть осуществляется непосредственное перераспределение товаров, формирование коммерческих предложений.

Таким образом, при проведении анализа ассортимента продукции предприятия необходимо учесть уровень, для решения задач которого должен проводиться анализ, учесть нюансы, связанные с подготовкой к анализу ассортимента (цели и задачи, грамотно подобрать инструменты, учитывать специфику сегмента b2b), а также правильно учитывать ту ситуацию, в которой непосредственно работает предприятие, для которого проводится анализ ассортимента.

Для примера можно взять условия, в рамках которых в настоящее время работает компания «Гринавто» и другие компании, предоставляющие запасные части и услуги автосервиса для грузоперевозчиков (в городе Омск, Омской области и для транзитной техники):

Компания реализует запчасти для мелкого и крупного узлового ремонта, ремонта ходовой, проведения техобслуживания, капитального ремонта двигателей

Запчасти должны предоставляться клиентам в кратчайшее время: в течение дня, максимум – в течение рабочей недели (такой срок может подождать лояльный клиент либо это время, необходимое для доставки редкого, дефицитного товара)

В настоящее время компании данного сегмента испытывают сложности с наличием необходимых запчастей. Проблема цены, остро стоявшая в 2022 году, отступает на второй план. При этом даже в 2022 году, когда колебания цены по отдельным товарам могли быть кратными в течение месяца, клиенты были готовы приобретать продукцию, так как при отсутствии ремонта техника просто не поедет. Отсутствие ремонта означает, что компания не будет зарабатывать деньги, что очень важно для грузоперевозок, где зачастую у компаний в собственности находится от одного до пяти-десяти грузовых автомобилей

При этом нужно учитывать, что отличие цены на запасные части и сервисное обслуживание, которые будут превышать таковые у конкурентов более чем на 10-15% уже воспринимаются потенциальными и текущими клиентами как несправедливые. Поэтому цена товара – это тоже

важный фактор, который нужно учитывать при планировании наполнения ассортимента товаров компании

В настоящее время снизились требования к предоставлению запасных частей от завода-изготовителя – клиенты готовы приобретать товары-заменители (от китайских и турецких заводов, либо европейские, но не произведенные на том же заводе, что и грузовой автомобиль либо не обладающие всем набором сертификатов для лицензионной продукции).

Таким образом, мы видим необходимость подбирать для компании ассортимент таким образом, чтобы:

ассортимент удовлетворял запросу целевой аудитории компании

цена находилась в приемлемом для клиентов диапазоне

продукция могла быть доставлена в срок, который удовлетворит основную часть клиентов

компания при этом имела возможность для маневра (не всем клиентам необходимы запчасти, закупленные у заводов-изготовителей или их официальных представителей)

для решения каких вопросов проводится ассортиментный анализ: на корпоративном, деловом, функциональном или оперативном уровне  
в итоге, на основе подготовленного плана, решения должны выполнять четко поставленные задачи.

Имея перед собой перечень подобных уточняющих вопросов (составленных исходя из специфики предприятия) можно подобрать те методы, которые будут наиболее успешно применены при анализе ассортимента компании. В итоге сложная поначалу задача становится легкой для понимания и простой при выполнении – достаточно знать методы анализа, понимать поставленные задачи и изучить специфику предприятия. Работы при этом специалисту по маркетингу предстоит много, но цели и инструменты их достижения будут ясны и, следовательно, применяться корректно.

#### Библиографический список:

Абрютина, М.С. Экономический анализ торговой деятельности. Текст: учеб./ М.С. Абрютина. – М.: ИНФРА-М, 2020. – 250 с.

Алексеева, Н.А. Комплексный экономический анализ: учебное пособие / Н.А. Алексеева. – Ижевск: Ижевская ГСХА, 2020. – 316 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e/landbook.com/book178018> (дата обращения: 03.04.2023).» (Алексеева, Н.А. Комплексный экономический анализ: учебное пособие / Н.А. Алексеева. – Ижевск ГСХА, 2020. – 316 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-

библиотечная система. – URL: <https://e.landbook.com/book/178018>.

Багиев Г.Л., Тарасевич В.М. Маркетинг: учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2010. – 576 с.: ил. – (серия «Учебник для вузов»).

Бахмарева, Н.В. Комплексный экономический анализ хозяйственной деятельности: учебное пособие / Н.В. Бахмарева – Красноярск: СибГУ им. академика М.Ф. Решетнёва, 2021. – 100 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://elandbook.com/book/195092>» (Бахмарева, Н.В. Комплексный экономический анализ хозяйственной деятельности: учебное пособие / Н.В. Бахмарева. – Красноярск: СибГУ им. академика М.Ф. Решетнёва, 2021. – 100 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.landbook.com/book/195092> (дата обращения: 03.04.2023). – Режим доступа для авториз. пользователей. – С. 60).

Бондина, Н.Н. Экономический анализ в системе управления организацией: учебное пособие / Н.Н. Бондина, И.А. Бондин, Т.В. Зубкова. – Пенза: ПГАУ, 2020, 2020. – 195 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.landbook.com/book/170985>.

Киселева, Е.Н. Организация коммерческой деятельности по отраслям и сферам применения. Текст / Е.Н. Киселева. – М.: ЮНИТИ, 2018. – 275 т.

Кнышева Е.Н. Маркетинг: [учеб. пособие] / Е.Н. Кнышева. – М.: Форум, 2004. – 282 с.

Котлер Ф., Келлер К.Л. Маркетинг-менеджмент. – Изд-во: «Питер», 2015, 800 с.

Одинцова Е.В. Формирование ассортиментной политики. Энциклопедия маркетинга [Электронный ресурс] URL: [https://www.marketing.spb.ru/libmm/pricing/assortment\\_policy1.htm](https://www.marketing.spb.ru/libmm/pricing/assortment_policy1.htm) (дата обращения 03.04.2023).

Олейник, А.Н. Анализ улучшения эффективности производства продукции растениеводства / А.Н. Олейник, Е.А. Болотнова, А.В. Чубарева, М.В. Ананьева // Естественно-гуманитарные исследования. – 2021. - №38 (6). – С. 268271.

Попреткина А.А. Анализ и планирование ассортиментной политики // Экономика и социум. – 2022. – № 1. – С. 131-136

Потолкова, М.О. Закупочно-сбытовая деятельность коммерческих предприятий. Текст: учеб./ М.О. Потолкова. – М.: ЮНИТИ, 2020. 235 с.

Цепкова М.А. Управление ассортиментом российской оптовой торговли // Практический маркетинг. – 2018. - №10. – С. 37-44

Шелехова, Л.В. Методы оптимальных решений: учебное пособие / Л.В. Шелехова. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 304 с. – ISBN 978-5-8114-216-7. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.landbook.com/book/209813>.

---

**О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДАННЫМИ НА ПЛОСКОСТЯХ СИЛЬНОГО  
ВЫРОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ РЯДА УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В  
ПРОСТРАНСТВЕ  $R_3$ .**

---

*Васильева О. А.*  
к.ф.-м.н., доцент  
Самарский университет  
Самара, Россия

*Vasilyeva O. A.*  
Associate Professor  
Samara University  
Samara, Russia

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.106.2.1780

**АННОТАЦИЯ**

В трёхмерном евклидовом пространстве рассмотрены одно-, двух- и трёхпараметрические аналоги уравнения Эйлера–Дарбу с параметрами равными единице, что говорит о сильном вырождении решения рассматриваемых уравнений на плоскости сингулярности коэффициентов. Для каждого из трёх рассматриваемых уравнений методом Римана решены краевые задачи с данными на плоскости вырождения, которые можно рассматривать как видоизменённые задачи Коши.

Единственность решения поставленных задач следует из метода Римана. Полученные результаты могут применяться при решении новых краевых задач в более сложных областях, где требуется сопряжение решения на плоскости сингулярности коэффициентов уравнения.

**ABSTRACT**

In three-dimensional Euclidean space, one-, two- and three-parameter analogues of the Euler-Darboux equation with parameters equal to one are considered, which indicates a strong degeneracy of the solution of the equations under consideration on the plane of the singularity of the coefficients. For each of the three equations under consideration, the Riemann method solves boundary value problems with data on the plane of degeneracy, which can be considered as modified Cauchy problems.

The uniqueness of the solution of the tasks set follows from the Riemann method. The results obtained can be applied to solving new boundary value problems in more complex areas where conjugation of the solution on the plane of the singularity of the coefficients of the equation is required.

**Ключевые слова:** Уравнение гиперболического типа, краевая задача.

**Keywords:** An equation of hyperbolic type, boundary value problem.

Введение

На множестве  $H = \left\{ \begin{matrix} (x, y, z) \\ 0 < z < x - y \end{matrix} \right\}$  рассматриваются пространственные аналоги уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$U_{xyz} + \frac{U_{yz}}{x-y-z} = 0 \quad (I)$$

$$U_{xyz} + \frac{1}{(x-y-z)}(U_{yz} - U_{xz}) = 0 \quad (II)$$

$$U_{xyz} + \frac{1}{(x-y-z)}(U_{yz} - U_{xz} - U_{xy}) = 0 \quad (III)$$

Так как все коэффициенты уравнений равны единице, т. е. имеет место случай сильного вырождения решения на плоскости  $z = x - y$ , где не только частные производные, но и само решение уравнений образуются бесконечность.

В силу этого условия поставленных задач содержат различные комбинации решения и его производных. Для уравнений (II) и (III) рассматривается вариант постановки задачи, при котором решение будет ограниченным на плоскости  $z = x - y$ .

Постановка задач

**Задача  $C_1$ .** На множестве  $H$  найти решение уравнения (I) с данными на плоскости  $z = x - y$ :

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} U(x, y, z) = \xi_1(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad (1)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} (x - y - z) U_{yz} = \mu_1(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} [U_z + U_{zy}(x-y-z) \ln(x-y-z)] = v_1(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad D = \left\{ \frac{(x, y)}{y, x} \right\}, \quad (3)$$

**Задача C<sub>2</sub>.** На множестве  $H$  найти решение уравнения (II) с данными:

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} (x-y-z) U_z = v_2(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad (4)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} \frac{\delta}{\delta y} [(x-y-z) U_z] = \mu_2(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} [U(x, y, z) + (x-y-z) U_z \ln(x-y-z)] = \xi_2(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (6)$$

**Задача C<sub>3</sub>.** На множестве  $H$  найти решение уравнения (III) с данными, удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} (x-y-z) U(x, y, z) = \tau_3(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad (7)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} [(x-y-z) U_z - U] = v_3(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad (8)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} [U_{zy}(x-y-z) - U_y - U_z] = \mu_3(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (9)$$

На данные всех трёх задач полагаются

**Условия А.**  $\frac{\delta^2 \xi k}{\delta x \delta y}, \frac{\delta^2 \nu k}{\delta x \delta y}, \frac{\delta^2 \mu k}{\delta x \delta y}$  непрерывны в своих областях определения,  $k = 1, 3$ .

Для решения задач  $C_1, C_2, C_3$  применяем метод Римана [1].

В области  $H$  возьмём произвольную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , рассмотрим пирамидоидальную область  $H_\xi$ , ограниченную плоскостями  $x = x_0, y = y_0, z = z_0, z = x - y - \xi, \xi > 0$ . В предположении, что решение поставленной задачи существует, проинтегрируем тождество Грина [1] по области  $H_\xi$ . После применения формулы Гаусса–Остроградского получаем тождество  $\sum_{j=1}^4 I_j = 0$ , (10)

где  $I_j$  – двойные интегралы по областям, лежащим на гранях пирамиды  $H_\xi$  соответственно в плоскостях  $x = x_0, y = y_0, z = z_0, z = x - y - \xi$ . Для вычисления интегралов  $I_j$  применяются преобразования, связанные со свойствами функции Римана данного уравнения, а также интегрирование по частям.

Для уравнения (I) функция Римана имеет вид [1]:

$$V(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{x-y-z}{x_0-y-z}$$

В результате преобразования тождества (10) получаем

$$U(x_0, y_0, z_0) = U(x_0, y_0, x_0 - z - \xi) - \int_{z_0}^{x_0 - y_0 - \xi} [U_z(x_0, x_0 - z - \xi, z) dz - \xi \ln \xi U_{yz}(x_0, x_0 - z - \xi, z)] dz + \int_{z_0}^{x_0 - y_0 - \xi} \xi U_{yz}(x_0, x_0 - z - \xi, z) \ln(x_0 - y_0 - z) dz + \int_{y_0}^{x_0 - z_0 - \xi} dy \int_{z_0 + y + \xi}^{x_0} \frac{\delta}{\delta x} [\xi U_{yz}(x, y, x - y - \xi)] \ln(x_0 - x + \xi) dx \quad (11)$$

В тождестве (11) перейдём к пределу при  $\xi \rightarrow 0$  с учётом условий (1)–(3). После переобозначения и замены переменных в двойном интеграле имеем

$$U(x, y, z) = \tau_1(x, y) - \int_z^{x-y} \nu_1(x, x-s) ds + \int_z^{x-y} \mu_1(y+s, s) \ln(x-y-s) ds + \int_z^{x-y} ds \int_y^{x-s} \frac{\delta \mu_1(t+s, t)}{\delta t} \ln(x-x-s) dt \quad (12)$$

Проверкой называем, что при выполнении условий (А), функция (12) удовлетворяет уравнению (I) и условиям (1)–(3). Единственность решения задачи следует из метода Римана. Аналогичными рассуждениями получаем решения задач  $C_2, C_3$ . Функция Римана задачи  $C_2$ :

$$V = \frac{x-y-z}{x_0-y_0-z} \quad [1]$$

В результате преобразования тождества (10) получаем

$$U(x_0, y_0, z_0) = U(x_0, y_0, x_0 - y_0 - \xi) + \xi \ln \xi U_z(x_0, y_0, x_0 - y_0 - \xi) - \xi U_z(x_0, x_0 - z_0 - \xi, z_0) \ln(x_0 - z_0 - y_0) - \xi \int_{z_0}^{x_0 - z_0 - \xi} \frac{\delta}{\delta z} [U_z(x_0, x_0 - z, z)] \ln(x_0 - z - y_0 + \xi) dz +$$

$\int_{y_0}^{x_0-z_0-\xi} dy \int_{z_0+y+\xi}^{x_0} \frac{\xi U_{yz} - U_z(x, y, x-y-\xi)}{x_0-x+y-y_0+\xi} dx$  После предельного перехода, с учётом условий (4)-(6) и переобозначения переменных имеем

$$U(x, y, z) = \tau_2(x, y) - v_2(x, x-z) \ln(x-y-z) - \int_z^{x-y} \frac{\delta}{\delta t} [v_2(x, x-t)] \ln(x-y-t) dt + \int_z^{x-y} \frac{dt}{x-y-t} \int_y^{x-t} \mu_2(t+s, s) ds \quad (13)$$

Факт существования решения задачи  $C_2$  установлен также проверкой.

Из формулы (13) следует, что решение задачи  $C_2$  на плоскости  $z = x - y$  неограничено. Однако, если в условии (4) поменять  $v_2(x, y) \equiv 0$ , то формула (13) примет вид:

$$U(x, y, z) = \tau(x, y) + (x-y-z) \int_0^1 du \int_0^1 \mu_2(x + (x-y-z)Q(V-1), y + (x-y-z)QV) dV,$$

$$\text{откуда следует } \lim_{z \rightarrow x-y} U(x, y, z) = 2(x, y).$$

Функция Римана уравнения (III)

$$V = \frac{x-y-z}{x_0-y_0-z_0} \quad [1]$$

Тождество (10) преобразуется к виду:

$U(x, y, z) = \frac{1}{x_0-y_0-z_0} \left[ \xi U(x_0, y_0, x_0 - y_0 - \xi) + \int_{y_0}^{x_0-z_0-\xi} (U(x_0, y, x_0 - y - \xi) - \xi U_z(x_0, y, x_0 - y)) dy + \int_{y_0}^{x_0-z_0-\xi} dy \int_{z_0+y+\xi}^{x_0} (\xi U_{yz}(x, y, x-y-\xi) - U_y - U_z) dx \right]$  После предельного перехода при  $\xi \rightarrow 0$ , с учётом условий (7)-(9), получаем решение задачи  $C_3$ :

$$U(x, y, z) = \frac{1}{x-y-z} \left[ \tau_1(x, y) - \int_z^{x-y} v_3(x, x-t) dt + \int_z^{x-y} dx \int_z^{x-z} \mu_1(z-x, t) dt \right] \quad (14)$$

Если в формуле (14) положить  $\tau_3 \equiv 0$ , сделать замену переменных в интегралах, то будем иметь

$U(x, y, z) = - \int_0^1 v_3(x, x-z - (x-y-z)Q) dQ + (x-y-z) \int_0^1 w dw \int_0^1 \mu_3 dw$  - решение, ограниченное на плоскости  $z = x - y$ , действительно  $\lim_{z \rightarrow x-y} U(x, y, z) = -v_3(x, y)$ .

При выполнении условия А существует единственное решение задачи  $C_3$ .

### Литература

1. В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев, О.К. Быстрова, В.Н. Захаров "Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в п-

мерном евклидовом пространстве и их применение." Самарский университет, Самара, 1995, с. 75.

---

## ВЫВОД ОСНОВНОГО ЗАКОНА АЭРОДИНАМИКИ

---

*Дрюков Владимир Михайлович*

В настоящее время в аэродинамике не известен физический принцип возникновения подъёмной силы крыла. Также не сформулирован основной закон аэродинамики.

Основное уравнение аэродинамики (основной закон) можно вывести из молекулярно – кинетической теории. В структуре основного закона должны быть определены взаимосвязи всех величин, действующих в аэродинамике:

**1. Динамическое давление газа (скоростной**

**напор)**  $\frac{\rho v^2}{2}$ ,

**2. Статическое давление газа  $p$ ,**

**3. Общее давление газа  $P_0$ .**

Исторически наиболее близко к выводу формулы основного закона гидродинамики подошел Бернулли в 1738 году в работе

«Гидродинамика». В этой работе он впервые вывел уравнение, впоследствии названное его именем.

В настоящее время это уравнение является единственным, которое позывает взаимосвязь скоростного напора и статического давления, не указывая на физическую причину этой взаимосвязи.

Однако уравнение Бернулли не может использоваться в аэродинамике по нескольким причинам:

1. Это уравнение справедливо только для идеальной (несжимаемой) жидкости, поэтому оно не может быть применимо для газа.

2. Это уравнение не полное. Оно составлено только из двух величин из трёх, действующих в аэродинамике.

3. В правой части этого уравнения вместо физической величины стоит константа, не имеющая физического смысла.

Для вывода основного закона аэродинамики преобразуем уравнение Бернулли.

Обычно уравнение Бернулли представляют в виде:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = const, (1)$$

Где:  $const$  - константа, не имеющая физического смысла,

$\frac{\rho v^2}{2}$  - динамическое давление, направленное параллельно поверхности. Его можно обозначить  $P_\tau$ ,

$\rho gh$  - статическое давление, направленное перпендикулярно к поверхности,

$p$  - давление, направленное перпендикулярно к поверхности.

Последние два давления представляют собой одно статическое давление, направленное перпендикулярно к поверхности твёрдого тела.

Его можно обозначить  $P_n$ .

$$P_n = \rho gh + p, (2)$$

С учетом (2) уравнение Бернулли можно переписать более логичным образом:

$$P_\tau + P_n = const, (3)$$

Где:  $P_\tau$  - давление, направленное вдоль поверхности,

$P_n$  - давление, направленное перпендикулярно к поверхности.

Из уравнения (3) следует, что сумма давлений, направленных вдоль поверхности и перпендикулярно к поверхности, постоянна. Следует учитывать, что давление это вектор, а складывать (или вычитать) вектора нужно по правилам векторной алгебры.

Формулировка уравнения Бернулли в виде (3) более понятна, но это уравнение не раскрывает физической взаимосвязи статического давления и скоростного напора.

Для вывода основного закона аэродинамики рассмотрим молекулярную физическую модель взаимосвязи статического давления и скоростного напора. Для этого воспользуемся хорошо известной молекулярно – кинетической моделью.

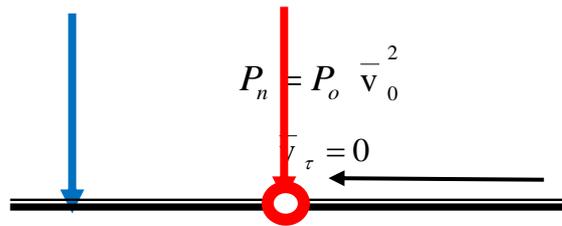
Известно, что все вещества состоят из молекул. Давление газа на поверхность твёрдого тела возникает при соударении молекул газа с молекулами твёрдого тела.

Сначала рассмотрим формирование подъёмной силы без движения поверхности относительно газа (подъёмной силы нет).

### 1. Аэростатика.

**Физические причины возникновения статического давления в аэростатике хорошо известны из молекулярно – кинетической теории.** Статическое давление газа на твёрдую поверхность является следствием давления всех молекул газа, двигающихся перпендикулярно к поверхности.

**Определим давление газа на поверхность твёрдого тела без движения твердой поверхности относительно газа (рис.1), например, крыла самолёта, стоящего на земле (аэростатика).**



а) б)

Рис. 1. Аэростатика.

При отсутствии движения твёрдой поверхности относительно газа статическое давление и квадрат средней скорости молекул направлены перпендикулярно поверхности твёрдого тела. Подъёмной силы нет (рис.1).

Без движения твёрдой поверхности относительно газа, справедливо основное уравнение молекулярно – кинетической теории:

$$P_0 = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}_0^2, (4)$$

Где:  $P_0$  - давление газа на неподвижную поверхность твёрдого тела при возможности движения молекул по трём осям,

$1/3$  - коэффициент, связанный с движением молекул идеального газа по трём осям,

$n$  - количество молекул идеального газа,

$m_0$  - масса молекул идеального газа.

Формулу (4) можно представить также в виде:

$$P_0 = \frac{1}{3} \rho \bar{v}_0^2, (5)$$

Где:  $P_0$  - давление газа на неподвижную поверхность твёрдого тела при возможности движения молекул по трём осям,

$1/3$  - коэффициент, связанный с движением молекул идеального газа по трём осям,

$\rho$  - плотность идеального газа,

$\bar{v}_0^2$  - квадрат средней скорости молекул идеального газа.

Таким образом, без движения поверхности твёрдого тела относительно газа, **статическое давление** направлено перпендикулярно к поверхности.

В аэростатике статическое давление **равно общему давлению** газа.

$$P_n = P_o, (6)$$

## 2. Аэродинамика.

**Физические причины возникновения давления газа при движении поверхности твёрдого тела относительно газа не описаны в молекулярно – кинетической теории.**

Определим давление газа на поверхность твёрдого тела при движении твёрдой поверхности относительно газа (рис. 2), например, крыла самолёта, летящего в воздухе (аэродинамика).

Из уравнения (3) видно, что есть взаимосвязь между статическим давлением и скоростным напором. Чем больше скорость движения твёрдой

поверхности относительно газа, тем меньше статическое давление газа на твёрдую поверхность.

Очевидно, что есть физический феномен, не описанный в настоящее время. Покажем физическую природу этого феномена.

Из уравнения (3) следует, что **сумма давлений, направленных вдоль поверхности и перпендикулярно к поверхности, постоянна.**

Чем больше величина скоростного напора  $P_\tau$  (рис. 2,а), тем меньше величина статического давления  $P_n$ .

На (рис. 2) видно, что их геометрическая сумма равна общему давлению газа.

Отсюда можно понять происхождение *const* в уравнении (3) и его физический аналог. Это общее давление газа.

На (рис.2) показан физический механизм взаимосвязи статического давления и скоростного напора.

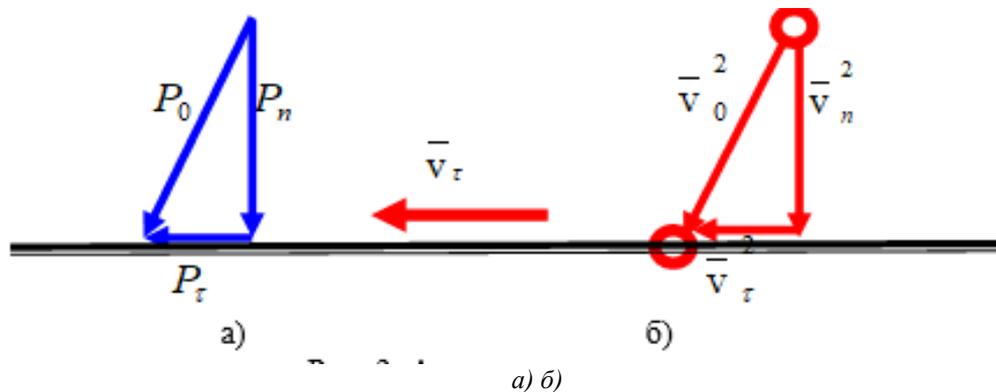


Рис. 2. Аэродинамика.

При движении твёрдой поверхности относительно газа, давление на эту поверхность уменьшается. Возникает подъёмная сила.

При движении твёрдой поверхности относительно газа со скоростью  $\bar{v}_\tau$ , **давление, направленное вдоль твёрдой поверхности – скоростной напор  $P_\tau$** , уменьшает статическое давление газа на поверхность твёрдого тела  $P_n$ , **направленное перпендикулярно к поверхности тела.**

При этом общее давление газа  $P_0$  постоянно и равно векторной сумме скоростного напора и статического давления.

Физический механизм взаимосвязи скоростного напора и статического давления достаточно простой.

Согласно молекулярно – кинетической теории, давление газа на твёрдую поверхность образуется за счет соударения молекул газа и молекул твердого тела. Движение молекулы газа по направлению к молекуле твердой поверхности занимает некоторое время. За это время молекула твёрдого тела успевает переместиться на некоторое расстояние.

Вследствие этого процесс столкновения молекул твёрдой поверхности и молекул газа происходит под некоторым углом к нормали, который зависит от величины горизонтальной скорости  $\bar{v}_\tau$ .

Чем больше горизонтальная скорость  $\overline{V}_\tau$ , тем больше этот угол, тем меньше вертикальное давление  $P_n$  на твёрдую поверхность.

**Подъёмная сила на крыле самолёта возникает за счёт этого физического процесса.**

**Скоростной напор** потока  $P_\tau$  определяется проекцией общего давления газа  $P_0$  на касательную проекцию этого давления (рис. 2,а), и всегда **направлен параллельно твёрдой поверхности:**

$$P_\tau = \frac{\rho \overline{V}_\tau^2}{2}, (7)$$

**Статическое давление** газа  $P_n$  определяется проекцией общего давления  $P_0$  на перпендикуляр. Это давление всегда **направлено перпендикулярно к твёрдой поверхности**, двигающейся относительно газа со скоростью  $\overline{V}_\tau$ :

$$P_n = \frac{\rho \overline{V}_n^2}{2}, (8)$$

Уменьшение этого давления на крыло самолёта в том месте, где больше скоростной напор, формирует подъёмную силу.

Взаимосвязь всех трёх давлений, формирующих подъёмную силу крыла самолёта можно получить с помощью теоремы Пифагора.

**В соответствии с теоремой Пифагора**, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (рис. 2,б).

$$\overline{V}_\tau^2 + \overline{V}_n^2 = \overline{V}_0^2, (9)$$

Переходя к давлению, получим:

$$\frac{\rho \overline{V}_\tau^2}{2} + \frac{\rho \overline{V}_n^2}{2} = \frac{\rho \overline{V}_0^2}{2}, (10)$$

Или

$$P_\tau + P_n = P_0, (11)$$

Учитывая (2), получим:

$$\frac{\rho \overline{V}^2}{2} + \rho gh + p = P_0, (12)$$

Где:  $P_0$  - полное давление газа,

$\frac{\rho \overline{V}^2}{2}$  - динамическое давление (скоростной напор), направленное **параллельно** поверхности,  
 $\rho gh$  - статическое давление, направленное **перпендикулярно** к поверхности,  
 $p$  - давление, направленное **перпендикулярно** к поверхности.

Сравним уравнение (12) с уравнением Бернулли:

$$\frac{\rho \overline{V}^2}{2} + \rho gh + p = const, (1)$$

В уравнении (1) вместо  $P_0$  - давления газа в уравнении (12) стоит *const* - константа, не имеющая физического смысла,

Очевидно, что уравнение (12) более полное, чем уравнение Бернулли и имеет физический смысл. Оно может использоваться как для идеальной жидкости, так и для реального газа.

Физическую формулировку основного закона аэродинамики можно составить в соответствии с формулой (11):

**Полное давление газа при движении твёрдой поверхности относительно газа равно векторной сумме скоростного напора и статического давления газа.**

Уравнение (11) является основным уравнением аэродинамики.

Уравнение Бернулли (1) является его частным случаем, где общее давление газа заменено константой.

#### Список использованной литературы:

1. Дрюков В.М. Физика. Дополнительные материалы. Тула. Изд-во ООО Аквариус 2021.
2. /http://drjukow.narod.ru
3. https://sites.google.com/site/drjukow
4. http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/9471.html

УДК 532.59: 532.501.34

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ВЗРЫВНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Неволин В.Г.

## THE GENERATION OF SURFACE WAVES BY THE EXPLOSIVE PRESSURE INPULSE

Nevolin V.G.

Рассматривается модельная задача возбуждения поверхностных волн взрывом. Исследование проводится для случая несжимаемой жидкости. Отсюда взрывное давление моделируется повышением плотности жидкости, в которой происходит взрыв.

Проблема возникла в связи с возможностью уничтожения смерча взрывом [1]. Разрушение смерча обусловлено возбуждением волн на границе раздела между нисходящим и восходящим потоками. Рост амплитуды этих волн приводит к схлопыванию так называемого глаза бури. Поскольку использование взрыва для уничтожения смерча часто сопровождается ещё и разрушением окружающей инфраструктуры, то исследуется возможность уничтожения смерча периодическим взрывным воздействием меньшей мощности.

The model problem of the generation of surface waves by the explosive pressure impulse is considered. The study is conducted for the case of the incompressible fluid. Because of that, the explosive pressure is modeled by the increase of the density of the fluid, inside which the explosion takes place.

This problem arose in connection with the possibility to destroy a tornado with the help of the explosion [1]. The destruction of a tornado is caused by the generation of waves on the interface between the descending and ascending flows. The increase of the amplitude of these waves leads to a collapse of the so-called eye of the storm. Since using the explosion for the destruction of a tornado is often accompanied by the destruction of the surrounding infrastructure, the possibility of the destruction of a tornado by the periodical explosive impact of lower power is studied.

**Ключевые слова:** Поверхностные волны, несжимаемая жидкость, плотность жидкости, давление взрыва, длительность действия взрыва, периодичность взрывного воздействия.

**Key words:** surface waves, incompressible fluid, fluid density, explosive pressure, duration of the effect of the explosion, frequency of the explosive impact

Рассматривается устойчивость поверхности раздела слоёв вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, когда в верхнем слое действуют или одиночный импульс давления длительностью  $\tau$  (рис.1, а), или же периодическое воздействие одиночными импульсами давления (рис.1, б).

Задача решается в линейном по вязкости приближении методом преобразования Лапласа по времени.

Поскольку рассмотрение проводится для случая несжимаемой жидкости, то изменение давления отождествляется с изменением плотности жидкости. Предполагается, что изменение давления не влияет на вязкость жидкости.

Равновесное состояние рассматриваемой системы запишется в виде:

$$\mathbf{V}_{0i} = 0, \zeta_0 = 0, p_i = P_g - \rho_i g z, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\zeta$  – смещение поверхности от положения равновесия,  $P_g$  – давление на границе раздела при  $z = 0$ ,  $i = 1, 2$  – номер жидкости. Жидкость с  $i = 1$  заполняет полупространство  $z \leq 0$ , а жидкость с  $i = 2$  заполняет область  $z > 0$ .

Исследуем устойчивость равновесия (1), для чего обычным образом внесём возмущения скорости и давления. Выбирая в качестве единиц измерения длины, времени, частоты, скорости и

давления соответственно  $[\alpha/(\rho_1 + \rho_g)g]^{1/2}$ ,  $[\alpha/(\rho_1 + \rho_g)g^3]^{1/4}$ ,  $[(\rho_1 + \rho_g)g^3/\alpha]^{1/4}$ ,  $[\alpha g/(\rho_1 + \rho_g)]^{1/4}$  и  $[\alpha g/(\rho_1 + \rho_g)]^{1/2}$ , получим для возмущений следующую линеаризованную систему уравнений:

$$\partial \mathbf{v}_i / \partial t = - (1/\beta_i) \nabla p_i + \gamma_i \nabla^2 \mathbf{v}_i, \quad \nabla \mathbf{v}_i = 0, \quad (2)$$

где  $\beta_i = \rho_i/(\rho_1 + \rho_g)$ ,  $\gamma_i = v_i [g(\rho_1 + \rho_g)^3/\alpha^3]^{1/4}$ ,  $\rho_2 = \rho_g + \Delta\rho$ ,  $\beta_2 = \beta_{20} + \Delta\beta$ ,

$$\beta_{20} = \rho_g/(\rho_1 + \rho_g), \quad \Delta\beta = \Delta\rho/(\rho_1 + \rho_g).$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела. Изменение плотности  $\Delta\rho$  в области  $z > 0$  найдём, например, из уравнения  $P_m/P_g = (\rho_m/\rho_g)^3$ , т.е.  $\Delta\rho = \rho_g [(P_m/P_g)^{1/3} - 1]$  (см., например [2]). Индекс  $g$  говорит об исходных параметрах жидкости с номером 2 (газовая среда). Индекс  $m$  соответствует параметрам жидкости с номером 2 при взрывном давлении,  $P_g = P_0$  – атмосферное давление (давление на границе раздела жидкость-газ).

В линейном по  $\zeta$  приближении, имеем на границе раздела следующее [3]:

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \times \mathbf{n} = 0, \quad \partial \zeta / \partial t = w_1, \quad (3)$$

$$\beta_1 \gamma_1 (\partial u_1 / \partial z + \partial w_1 / \partial x) = \beta_2 \gamma_2 (\partial u_2 / \partial z + \partial w_2 / \partial x),$$

$$\beta_1\gamma_1(\partial v_1/\partial z + \partial w_1/\partial y) = \beta_2\gamma_2(\partial v_2/\partial z + \partial w_2/\partial y),$$

$$p_1 - p_2 = (\beta_1 - \beta_2)\zeta - (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\zeta + 2\beta_1\gamma_1\partial w_1/\partial z - 2\beta_2\gamma_2\partial w_2/\partial z.$$

При  $z \rightarrow \pm \infty$   $v_i \rightarrow 0$ .

Здесь  $\mathbf{n} = (-\partial\zeta/\partial x, -\partial\zeta/\partial y, 1)$  единичный вектор нормали к поверхности.

Совершая преобразование Фурье по переменным  $x, y$  и Лапласа по времени и учитывая, что  $v_i(t=0) = 0, \zeta(t=0) = 0$  и  $v_i, \zeta, \partial v_i/\partial x, \partial v_i/\partial y, \partial\zeta/\partial y \rightarrow 0$  при  $|x, y| \rightarrow \pm\infty$ , получим, поступая также как и в работе [4], после обратного преобразования Лапласа в линейном по вязкости и приращению плотности приближении следующее уравнение для смещения поверхности от положения равновесия:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\zeta}{dt} + \Omega_{0i}^2\zeta = 0, \quad (4)$$

где

$$\delta = \left( \beta_1\gamma_1 + \beta_{20}\gamma_2 + \frac{\beta_1^2\gamma_1^{3/2} + \beta_{20}^2\gamma_2^{3/2} - 2\beta_1\beta_{20}(\gamma_1\sqrt{\gamma_2} + \gamma_2\sqrt{\gamma_1})}{\beta_1\sqrt{\gamma_1} + \beta_{20}\sqrt{\gamma_2}} \right) k^2,$$

$$\Omega_0^2 = k^3 + k(\beta_1 - \beta_0), \Omega_1^2 = (kq - k^3), k - \text{волновое число.}$$

Здесь  $q \equiv \Delta\beta = (\beta_1 - \beta_m) = -\beta_1[(P_m/P_0)^{1/3} - 1]$  при  $0 \leq t \leq \tau$  и  $q = (\beta_1 - \beta_0)$ , если  $0 \geq t \geq \tau$  (Фиг.1, а).

На участке  $0 \leq t \leq \tau$  общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$\zeta_1 = e^{-\delta t}(C_1sh\Omega_1 t + C_2ch\Omega_1 t),$$

а на участке  $0 \geq t \geq \tau$  общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$\zeta_2 = e^{-\delta t}(C_3sin\Omega_2 t + C_4cos\Omega_2 t),$$

где  $\Omega_1^2 = (kG - \Omega_2^2), \Omega_2^2 = (\Omega_0^2 - \delta^2), G \equiv (\beta_m - \beta_0) = \beta_0[(P_m/P_0)^{1/3} - 1]$ .

Из условий непрерывности на границах участков при  $t = 0$  и  $t = \tau$

$$\zeta_1(0) = \zeta_2(0), \partial\zeta_1(0)/\partial t = \partial\zeta_2(0)/\partial t, \zeta_1(\tau) = \zeta_2(\tau), \partial\zeta_1(\tau)/\partial t = \partial\zeta_2(\tau)/\partial t$$

получим систему линейных однородных уравнений для постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  [5]. Из равенства нулю определителя этой системы уравнений, получим условие нетривиальности решения:

$$2\Omega_1\Omega_2[(ch\Omega_1\tau) \cdot (cos\Omega_2\tau) - 1] - (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)(sh\Omega_1\tau) \cdot (sin\Omega_2\tau) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) связывает между собой волновое число (длину волны), возбуждаемых поверхностных волн, время действия взрыва с амплитудой взрывного давления  $\Delta P = P_m - P_0$ .

При реализации режима движения «b» (Рис. 1) уравнение (4) примет вид:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\zeta}{dt} + \Omega_{0i}^2\zeta = 0 \quad (6)$$

Здесь на участке 1 ( $0 < t < T/2$ )  $\Omega_{01}^2 = -[k(\beta_m - \beta_1) - k^3] = -\{k\beta_1[(P_m/P_0)^{1/3} - 1] - k^3\} = -\Omega_1^2$ , а на участке 2 ( $T/2 < t < T$ )  $\Omega_{02}^2 = k^3 + k(\beta_1 - \beta_g)$  (см. фиг. 1, b). Общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$\zeta_1 = e^{-\delta t}(C_1sh\Omega_1 t + C_2ch\Omega_1 t),$$

$$\zeta_2 = e^{-\delta t}(C_3sin\Omega_2 t + C_4cos\Omega_2 t),$$

где  $\Omega_1^2 = (kG - \Omega_2^2), \Omega_2^2 = (\Omega_0^2 - \delta^2), G \equiv (\beta_m - \beta_g) = \beta_g[(P_m/P_0)^{1/3} - 1], \Omega_0^2 = k^3 + k(\beta_1 - \beta_0)$ .

Из условий непрерывности на границе участков 1 и 2 при  $t = T/2$

$$\zeta_1 = \zeta_2, \partial\zeta_1/\partial t = \partial\zeta_2/\partial t$$

вместе с условиями «воспроизводства» через период  $T$

$$\zeta_2(T) = \mu\zeta_1(0), \partial\zeta_2/\partial t|_{t=T} = \mu\partial\zeta_1/\partial t|_{t=0}$$

получим систему линейных однородных уравнений для постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Из равенства нулю определителя этой системы уравнений, получим для фактора  $\mu$  квадратное уравнение [6]:

$$\mu^2 - 2\mu\{ch(T\Omega_1/2) \cdot cos(T\Omega_0/2) - [(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)/2\Omega_1\Omega_0]sh(T\Omega_1/2) \cdot sin(T\Omega_0/2)\}e^{-\delta T} + e^{-2\delta T} = 0. \quad (7)$$

Периодические решения получаются при  $\mu = \pm 1$ . Отсюда для границ области устойчивости получаем:

$$ch(T\Omega_1/2) \cdot cos(T\Omega_0/2) - [(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)/2\Omega_1\Omega_0]sh(T\Omega_1/2) \cdot sin(T\Omega_0/2) = \pm ch(\delta T). \quad (8)$$

Знак плюс соответствует «целым» решениям, т.е. колебаниям поверхности с периодом, равным периоду модуляции, а знак минус соответствует «полуцелым» решениям, когда период колебаний поверхности вдвое больше периода модуляции.

Уравнения (8) связывает между собой волновое число  $k$ , вязкое трение  $\delta$  с амплитудой и частотой (периодом) модуляции давления  $\Delta P$ .

Амплитуда давления одиночного и периодически действующего взрыва от времени их действия для различных значений волнового числа приведена на фиг.2.

**Заключение.** Получена зависимость значений амплитуд взрывного давления для единичного и периодического взрывного воздействия от времени

их действия для различных значений волнового числа.

### Литература

1.Таланов Б.П. Способ борьбы со смерчем. Пат. РФ № 2062660, МПК: А01G 15/00// БИ 2002, №15.

2.Баум Ф.А., Станюкович К.П., Шехтер Б.И. Физика взрыва. – М.: Гостехиздат. 1959. – 799 с.

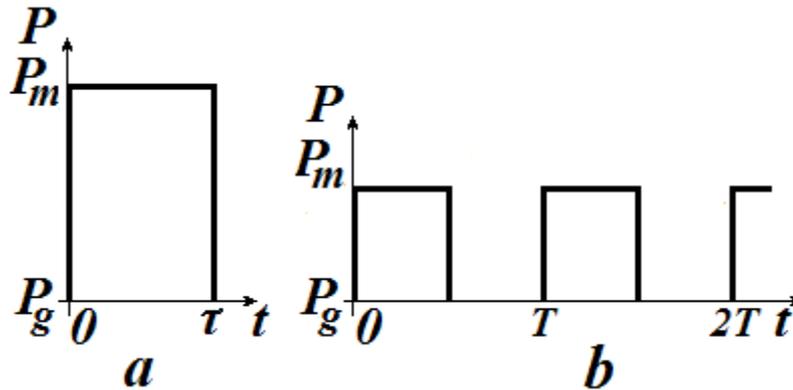
3.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред, гл.2. М.-Л., Гостехиздат, 1944.

4.Неволин В.Г. Параметрическое возбуждение волн на границе раздела.//Изв. АН СССР. МЖГ. – 1977. – Вып. 2. – С.167-170.

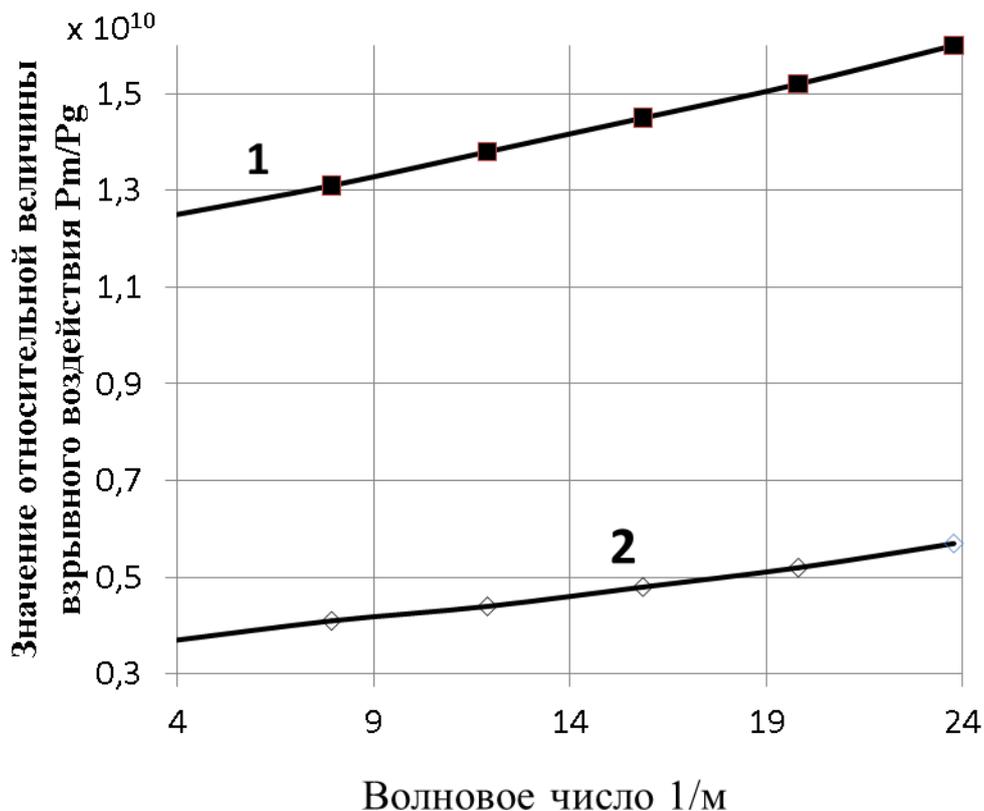
5.Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. М.: Высшая школа, 2001. – 395 с.

6.Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Ковективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Главная редакция ф.-мат. Литературы изд-ва «Наука», 1972. – 392 с.

Рисунки и подрисуночные подписи



Фиг. 1. Импульс давления взрыва: а) одиночный импульс взрывного давления, б) периодически действующие взрывные импульсы.  $P_m$  – амплитудное значение давления взрыва,  $P_g$  – исходное гидростатическое давление на границе раздела.



Фиг. 2. Зависимость относительной амплитуды взрывного давления от времени действия взрыва. Здесь  $P_m$  – давление взрыва,  $P_g \equiv P_0$  – атмосферное давление, 1) Одиночное взрывное воздействие длительностью 0,01 с, 2) Периодическое взрывное воздействие с периодом 0,02 с.

519.683.8, 519.688

**АВТОМАТИЧЕСКОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОГРАММ НА ЯЗЫКЕ ПАСКАЛЬ****Новиков М.Д.***Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
факультет вычислительной математики и кибернетики,  
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, факультет ВМК.***AUTOMATIC TESTING OF COMPLEX PASCAL PROGRAMS****M.D. Novikov***Moscow State university,  
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,  
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory.***АННОТАЦИЯ**

Статья посвящена автоматическому тестированию программ на языке Паскаль, выполняемых студентами первого курса факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова. Описывается представление сложных структур данных на экране компьютера и тестирование программ, допускающих различные варианты правильных ответов.

**ABSTRACT**

The article is devoted to automatic testing of Pascal programs created by first year students of the faculty of computational mathematics and cybernetics of Moscow state university. Output of complex data to the computer screen is described. Testing of programs with multiple correct answers is discussed.

**Ключевые слова:** программирование, язык Паскаль, тестирование программ, структуры данных.

**Key words:** programming, Pascal language, program testing, data structures.

**Введение.**

На факультете ВМК МГУ с 2017 года используется система автоматического тестирования программ (САТП), предназначенная для проверки правильности программ на языке Паскаль, выполняемых студентами первого курса в рамках практикума на ЭВМ. Задачи для тестирования взяты, в основном, из книг [1], [2] и [3]. Эти книги содержат как задачи на составление программ, тестирование которых не вызывает затруднений, так и задачи, требующие нетривиальных алгоритмов для их программной реализации и специальных методов проверки правильности этих алгоритмов. Возможности САТП следующие: 1) можно тестировать как полную программу, так и фрагмент программы – процедуру или функцию; 2) проверяется выполнение формальных требований к программе, указанных в [1], [2] и [3] – это обычно запрет или, наоборот, обязательное использование каких-либо конструкций языка Паскаль; 3) проверяется корректность использования динамической памяти ЭВМ; 4) производится анализ выдаваемых тестируемой программой результатов на предмет их правильности. Основная информация по САТП изложена в работах [4], [5] и [6]. Данная статья посвящена выводу на экран данных сложной структуры, а также тестированию программ, допускающих различные верные ответы.

1. Тестирование программ, использующих данные сложной структуры.

САТП тестирует программы, проверяя их правильность на различных наборах исходных данных. Она выводит исходные данные,

полученный тестируемой программой результат и правильный результат для каждого теста. Вывод информации для скалярных числовых или символьных данных не представляет затруднений. Например, в задаче подсчета количества цифр неотрицательного целого числа ([1], задача 5.6 e), на экран компьютера выводятся исходные данные и результаты тестирования следующим образом:

Тест 1.

Исходные данные: 0

Полученный результат: 1

Правильный результат: 1

Верно.

Тест 2.

Исходные данные: 10

Полученный результат: 2

Правильный результат: 2

Верно.

и. т. д.

такой вывод компактен, понятен и не требует каких-либо пояснений.

Сложнее обстоит дело при тестировании программ, содержащих в качестве исходных данных одномерные массивы, матрицы, а также списки и двоичные деревья (см. [1], главы 16 и 17). Вводимая и выводимая информация содержит большое количество чисел или символов, которые надо компактно разместить на экране так, чтобы было легко проанализировать результаты тестирования и найти ошибку в тестируемой программе в случае неверного ответа.

САТП выводит каждый массив или список в виде строки из чисел или символов; матрица выводится в виде прямоугольной таблицы, т.е. используются традиционные методы вывода такой

информации. Сложнее обстоит дело с выводом двоичных деревьев. Требования к выводу те же – информация должна быть компактной и удобной для анализа.

Обычное графическое представление деревьев в виде последовательности соединенных ребрами вершин занимает много места на экране компьютера, сложно в реализации (особенно в случае дерева большой глубины и/или большого количества вершин) и обычно не требуется для установления причин, по которым тестируемая программа выдает неверный результат для какого-либо двоичного дерева. К тому же задачи на анализ и преобразование двоичных деревьев сложны в

реализации и соответствующие программы требуют большого количества тестов, которые должны быть компактно размещены на экране компьютера. Поэтому в САТП было выбрано представление двоичного дерева в виде последовательности путей от вершины к листьям. Оно оказалось простым для реализации и удобным для анализа результатов тестирования.

Например, дерево записывается как T 20 TL 30 TLL 1 TR 10 TRL 40 TRR 1. Такая форма экономит место на экране, позволяет увидеть результаты многих тестов одновременно и легко воссоздать исходное дерево для анализа в случае неверной работы программы на нём.

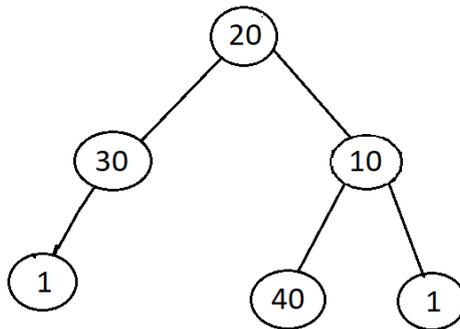


Рис. 1.

В качестве примера рассмотрим рекурсивную функцию, вычисляющую величину наибольшего элемента непустого дерева T ([1], задача 17.8 г):

```

Type Tree=^node; node=record data:real; left,
right:tree end;
Function Max(T:tree): real;
Var M1,M2:real;
Begin
If T=Nil Then Max:=0
Else Begin
M1:=Max(T^.left); M2:=Max(T^.right);
If M1<M2 Then M1:=M2; If M1<T^.data Then
M1:=T^.data;
Max:=T1 End;
End;

```

Эта функция содержит часто встречающуюся в студенческих программах ошибку. Она заключается в том, что в случае пустого дерева функция принимает значение 0. Соответственно, если в дереве все элементы отрицательны, то результат будет неверным.

Пример тестирования этой функции:

Тест 1.

Исходные данные: T 50

Полученный результат: 50

Правильный результат: 50

Верно.

Тест 2.

Исходные данные: T 80 TL -1 TLL 0.5 TLR -10 TR 100 TRL 60 TRR 60

Полученный результат: 100

Правильный результат: 100

Верно.

Тест 3.

Исходные данные: T -10 TL -1 TR -2 TRL -80

Полученный результат: 0

Правильный результат: -1

Ошибка.

и. т. д.

Из приведенных результатов тестирования сразу видно, что функция выдает неверный ответ в случае отрицательности всех элементов дерева.

Правильный вариант функции:

```

Function Max(T:tree): real;
Var M1,M2:real;
Begin
If (T^.left=Nil)and(T^.Right=Nil) Then
Max:=T^.Data
Else Begin
If T^.left<>Nil Then M1:=Max(T^.left) else
M1:=T^.data;
If T^.right<>Nil Then M1:=Max(T^.right) else
M1:=T^.data;
If M1<M2 Then M1:=M2; If M1<T^.data Then
M1:=T^.data;
Max:=T1 End;
End;

```

2. Тестирование программ, допускающих различные варианты правильных ответов.

В книгах [1], [2] и [3] содержатся задачи, требующие нетривиальных алгоритмов для их решения и часто допускающие более одного правильного ответа. Поэтому возникает проблема анализа результата, выдаваемого тестируемой программой на предмет его правильности. Просто сравнить результат с эталоном в этом случае недостаточно. Каждая такая задача требует индивидуального подхода.

Перечислим основные задачи, для которых реализован специальный анализ результата на предмет его правильности.

а) Задачи 17.17 з, и, м, н, о, п из [1]. Это задачи на построение или преобразование двоичных деревьев поиска: з) построение дерева поиска из заданных чисел, и) построение дерева поиска наименьшей высоты из заданных упорядоченных по возрастанию чисел, м) удаление из дерева поиска заданного элемента, н) объединение двух деревьев поиска в одно, о) и п) выделение из дерева поиска некоторого поддерева. Все эти задачи допускают более одного правильного ответа. Например, можно построить два различных дерева поиска наименьшей высоты, равной двум, из двух чисел А и В (для определенности можно считать, что  $A < B$ ):

Т А Т R В

и

Т В Т L А.

Оба ответа – правильные. Поэтому во всех указанных выше задачах производится анализ выдаваемого в качестве результата двоичного дерева: оно должно быть деревом поиска, состоять из требуемых вершин и иметь высоту, равную  $1 + \lceil \log_2 N \rceil$ , где  $N$  – число его вершин (для задачи 17.17 и). Конкретное расположение ребер между вершинами не имеет значения.

б) Алгебраические задачи на нахождение корней уравнений, геометрические задачи на нахождение точек пересечения прямых, элементов треугольников и проч. ([1], 4.12 г) и д), 5.52, 11.22, 18.3). Результат (совокупность чисел) может быть выведен в любом порядке.

в) Задачи 18.34, 18.35, 18.36, 18.38 и 18.40 из книги [1]. Это задачи, каждая из которых требует специального подхода к анализу решения. В САТП проверка правильности производится по специальным алгоритмам, индивидуальным для каждой из задач.

1) 18.34. В массиве из натуральных чисел требуется заменить нулем минимальное количество элементов так, чтобы сумма элементов массива стала меньше заданного числа  $S$ . Верным считается любой ответ, содержащий минимальное число нулей в массиве; при этом должно быть выполнено заданное ограничение на сумму.

2) 18.35. Задано  $N$  предметов. О каждом из них известен его вес и стоимость. Требуется найти такую выборку из этих предметов, чтобы их совокупный вес не превышал заданной величины, а стоимость была максимальной. Верным считается любая выборка с максимально возможной стоимостью и, если таких выборок больше одной, то правильной считается выборка с минимальным совокупным весом.

3) 18.36. Заданы  $N$  натуральных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и число  $S$ . Требуется так расставить знаки арифметических операций между числами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , чтобы получившееся выражение имело значение  $S$ . Любая расстановка со значением выражения, равным  $S$ , считается верной. Пример:

$N=3$ , числа равны 1, 2 и 3,  $S=6$ . Допустимые ответы:  $1*2*3$  и  $1+2+3$ .

4) 18.38. Даны координаты концов  $N$  отрезков на прямой. Найти любую точку, принадлежащую максимальному количеству отрезков. Пример:  $N=2$ , отрезки  $[0,4]$  и  $[2,6]$ . Любая точка на отрезке  $[2,4]$  считается верным ответом.

5) 18.40. Даны координаты центров и радиусы  $N$  кругов на плоскости. Определить, существует ли хотя бы одна точка, принадлежащая всем этим кругам, и, если существует, вывести ее координаты. Верным ответом считается любая точка, принадлежащая всем кругам.

г) Задание 2 из книги [3] на обработку формул специального вида (см. также [1], задачи 17.15 и 17.16). Формула определяется следующим образом.

<формула> ::= <число> | <переменная> | (<формула> <знак> <формула>)

<знак> ::= + | - | \*

<число> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<переменная> ::= X

Примеры формул:  $(X+5)$ ,  $((5-6)*X)$  и т.д.

Формула, получившаяся в результате указанного в задании преобразования, проверяется на правильность следующим образом: эквивалентными считаются все формулы, отличающиеся операциями, не меняющими их значений: это прибавление нуля и умножение на единицу. Например, эквивалентны формулы  $(X+5)$  и  $((X+5)+0)$ , 5 и  $(5*1)$  и т.д.

3. Заключение. Использование САТП существенно облегчило преподавателям проверку правильности программ, выполняемых студентами. Особенно это касается нетривиальных задач, ручное тестирование которых произвести сложно из-за большого количества необходимых тестов и входных данных для каждого теста. В настоящее время студенты приносят на проверку программы, уже проверенные и отлаженные с помощью САТП. Преподавателю остается лишь просмотреть текст каждой программы и задать студенту необходимые вопросы.

### Список литературы.

1. Пильшиков В.Н. Язык Паскаль. Упражнения и задачи. М.: Научный мир, 2003, 224 с.
2. Бордаченкова Е.А., Панферов А.А. Задания практикума. 1 курс. М.: МАКС Пресс, 2016, 48 с.
3. Трифонов Н.П., Пильшиков В.Н. Задания практикума на ЭВМ (1 курс). М.: МГУ, 2001, 34 с.
4. Новиков М.Д. Система автоматического тестирования программ, написанных на языке Паскаль. // Альманах современной науки и образования. Изд-во Грамота (Тамбов), №6, 2017, с. 68-71.
5. Новиков М.Д. Тестирование программ на языке Паскаль, использующих динамическую память. // Eastern-European Scientific Journal, т.1, №3 (67), 2021, с. 45-47.
6. Новиков М.Д. Автоматическое тестирование студенческих программ. // В сб. Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем.

Всероссийская научная конференция. Тверь, 2021,  
с. 235-239.

УДК 519.6

## ОБ ОДНОМ ЕСТЕСТВЕННОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ЗНАМЕНИТОЙ ФОРМУЛЫ ФРОБЕНИУСА.

**Савельев В.П.\*,**

кандидат физико-математических наук, доцент,

**Сутягина Н.И.,**

кандидат экономических наук, доцент,

**Шамин А.А.,**

кандидат экономических наук, доцент,

*Нижегородский государственный инженерно-экономический университет*

*Россия, г. Княгинино*

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.106.2.1781

### АННОТАЦИЯ

Более 100 лет назад математик Фердинанд Георг Фробениус сформулировал следующую проблему: для заданного набора натуральных взаимно простых чисел требуется найти наибольшее число (впоследствии названное числом Фробениуса), не представимое в виде неотрицательной целочисленной комбинации этих чисел. Проблеме нахождения числа Фробениуса для нескольких натуральных чисел посвящено много работ, поскольку ее решение связано с решением других задач дискретной математики, таких как задача о рюкзаке, задачи теории графов. Известна формула Фробениуса для двух натуральных чисел. Общей формулы для трех и более чисел не существует, лишь имеются формулы и алгоритмы нахождения числа Фробениуса при некоторых дополнительных условиях. Например, имеется формула Фробениуса для конечного числа натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию. В данной работе выведена формула для числа Фробениуса для четырех натуральных чисел, третье из которых является числом Фробениуса для первых двух, а четвертое является числом Фробениуса для указанных первых трех. Доказаны соответствующие теоремы и приведены примеры.

**Ключевые слова:** взаимно простые числа, линейная неотрицательная целочисленная комбинация чисел, аддитивная по сложению полугруппа, множество Фробениуса, число Фробениуса, метод математической индукции

Как известно [1], для натуральных чисел  $a_i \in N, i = \overline{1, n}$ , можно определить аддитивную полугруппу по сложению  $G(a_1, \dots, a_n)$ , порожденную этими числами, так что любой элемент  $g(a_1, \dots, a_n)$  полугруппы  $G(a_1, \dots, a_n)$  может быть представлен в виде линейной комбинации вида

$$g(a_1, \dots, a_n) = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n, \quad (1)$$

где  $x_i \in Z_+, i = \overline{1, n}, Z_+$  – множество целых неотрицательных чисел.

Множество  $N \setminus G(a_1, \dots, a_n) = \overline{G(a_1, \dots, a_n)}$  называется множеством Фробениуса. Числом Фробениуса  $frob(a_1, \dots, a_n)$  называется наибольшее натуральное число, принадлежащее множеству Фробениуса  $\overline{G(a_1, \dots, a_n)}$ . Заметим, что из определения числа Фробениуса следует, что все натуральные числа, следующие за этим числом, принадлежат полугруппе  $G(a_1, \dots, a_n)$ .

Формула для числа Фробениуса известна в общем случае лишь для двух чисел: если наибольший общий делитель натуральных чисел  $a$  и  $b$  равен единице, то число Фробениуса  $F_2 = frob(a, b)$  задается знаменитой формулой Фробениуса

$$F_2 = ab - a - b = (a - 1)b - a \quad (2)$$

В общем случае такой формулы нет даже для трех натуральных чисел. Однако, в некоторых частных случаях формулы найдены, или предложены алгоритмы вычисления числа

Фробениуса [2 – 9]. В частности, в работе [9] доказана формула для числа Фробениуса  $F_3 = frob(a, b, F_2)$ , когда третье число является числом Фробениуса для первых двух чисел  $a < b$ :

$$F_3 = F_2 - a = (a - 1)b - 2a \quad (3)$$

Как видим, формулу (3) можно рассматривать как естественное продолжение формулы (2). В настоящей работе доказываются две формулы числа Фробениуса  $F_4 = frob(a, b, F_2, F_3)$  для четырех чисел, когда третье число является числом Фробениуса для первых двух взаимно простых чисел  $a < b$ , а четвертое число является числом Фробениуса для чисел  $a, b, F_3$ .

**Теорема 1.** Пусть натуральные числа  $a$  и  $b$  взаимно простые и выполняется условие  $b > 2a$ . Тогда справедлива формула

$$F_4 = (a - 1)b - 3a \quad (4)$$

**Доказательство.** Обозначим аддитивную полугруппу по сложению, порожденную двумя числами  $a, b$ , через  $G(a, b)$ , порожденную числами  $a, b, F_2$  – через  $G(a, b, F_2)$ , и порожденную числами  $a, b, F_2, F_3$  – через  $G(a, b, F_2, F_3)$ . Очевидно, что  $G(a, b) \subset G(a, b, F_2) \subset G(a, b, F_2, F_3)$ .

Из формулы (3) следует, что для всех  $i \in N$  имеет место соотношение:

$$(a - 1)b - 2a + i \in G(a, b, F_2). \quad (5)$$

В дальнейшем из всех  $i \in N$  мы будем рассматривать лишь  $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ . Таким образом, для всех  $i = \overline{1, a}$  число  $(a - 1)b - 2a + i$  может

быть представлено в виде неотрицательной целочисленной комбинации

$$(a - 1)b - 2a + i = x_i a + y_i b + z_i \text{frob}(a, b). \quad (6)$$

В частности, имея в виду формулу (6), при  $i = a$  имеем:

$$(a - 1)b - a = 0 * a + 0 * b + 1 * \text{frob}(a, b). \quad (7)$$

Поскольку при  $i = \overline{1, a - 1}$ , число  $(a - 1)b - 2a + i$  меньше, чем  $\text{frob}(a, b)$ , то справедливо соотношение (8):

$$(a - 1)b - 2a + i = x_i * a + y_i * b. \quad (8)$$

Так как  $-2a + i < 0$ , то для выполнения равенства (8) с неотрицательными целочисленными коэффициентами  $x_i$  и  $y_i$  значения коэффициентов  $y_i$  должны быть меньше, чем  $(a - 1)$ . Для доказательства теоремы достаточно показать, что все коэффициенты  $x_i$  в соотношении (8) не только неотрицательные, но и удовлетворяют условию:

$$x_i \geq 1, i = \overline{1, a - 1}. \quad (9)$$

Действительно, в этом случае все натуральные числа от  $(a - 1)b - 3a + 1$  до  $(a - 1)b - 2a - 1$  принадлежат полугруппе  $G(a, b)$ , и, следовательно, полугруппам  $G(a, b, F_2)$  и  $G(a, b, F_2, F_3)$ , в то время как число  $(a - 1)b - 3a = F_3 - a$  не может принадлежать полугруппе  $G(a, b, F_2)$ , ибо это противоречит понятию числа Фробениуса  $F_3$ .

Ниже для всех неотрицательных целочисленных значений  $y_i, i = \overline{1, a - 1}$ , меньших значения  $(a - 1)$ , мы найдем конкретные значения коэффициентов  $x_i, i = \overline{1, a - 1}$ , и убедимся в том, что условие (9) выполняется.

Это нетрудно сделать в следующих двух случаях:

когда  $b = ma + 1$ , где  $m$  – натуральное число, причем,  $m \geq 2$ ,

когда  $b = ma + a - 1 = (m + 1)a - 1$ , где  $m$  – натуральное число, причем,  $m \geq 2$ .

В первом случае зададим значения  $y_i = a - k \geq 0$ , и для каждого  $k \in \{2, 3, \dots, a\}$  определим, при каких значениях  $i_k$  и  $x_{i_k}$  выполняется формула (8):

$$(a - 1)b - 2a + i_k = x_{i_k} * a + (a - k) * b. \quad (10)$$

Перенесем  $(a - k) * b$  из правой части равенства (10) в левую и запишем (10) в виде

$$(k - 1)(ma + 1) - 2a + i_k = x_{i_k} a. \quad (11)$$

Соотношение (11) запишем в виде:

$$((k - 1)m - 2)a + k - 1 + i_k = x_{i_k} a. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что при тех ограничениях, которые наложены на натуральные числа  $k$  и  $i_k$  соотношение (12) может выполняться лишь в одном случае, когда  $k - 1 + i_k = a$ , то есть  $i_k = a - k + 1 > 0$ . В этом случае  $((k - 1)m - 1)a = x_{a-k+1} a$ , то есть, для всех  $k \in \{2, 3, \dots, a\}$  имеет место неравенство

$$x_{a-k+1} = (k - 1)m - 1 \geq 1. \quad (13)$$

Во втором случае также зададим значения  $y_i = a - k \geq 0, k \in \{2, 3, \dots, a\}$  и для каждого  $k$  определим, при каких  $i_k$  и значениях  $x_{i_k}$  выполняется формула (8). Перенесем  $(a - k) * b$  из правой части

равенства (10) в левую и запишем соотношение (8) в виде

$$(k - 1)((m + 1)a - 1) - 2a + i_k = x_{i_k} a. \quad (14)$$

Соотношение (14) запишем в виде:

$$((k - 1)(m + 1) - 2)a - k + 1 + i_k = x_{i_k} a. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что при  $i_k + 1 - k = 0$ , то есть при последовательных значениях  $i_k = k - 1, k \in \{2, 3, \dots, a\}$  коэффициент  $x_{i_k}$  будет целым, неотрицательным и  $x_i \geq 1$ . Действительно,

$$((k - 1)(m + 1) - 2)a = x_{i_k} a,$$

то есть для всех  $k \in \{2, 3, \dots, a\}$  имеет место неравенство

$$x_{i_k} = (k - 1)(m + 1) - 2 \geq 1. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда  $b = ma + j$ , за исключением случаев  $j = 1$  и  $j = a - 1$ , то есть, когда  $m$  и  $j$  натуральные числа и выполнены условия:

$$m \geq 2, j \in \{2, 3, \dots, a - 2\}. \quad (17)$$

Применим метод математической индукции.

Вначале покажем, что для значения  $y_{i_1} = a - 2$  выполняется формула (8), то есть имеет место формула

$$(a - 1)b - 2a + i_1 = x_{i_1} * a + (a - 2) * b. \quad (18)$$

Определим значение  $i_1$  и покажем, что коэффициент  $x_{i_1}$  является целочисленным, причем,  $x_{i_1} \geq 1$ . Действительно, перенесем  $(a - 2) * b$  из правой части соотношения (18) в левую, и запишем его в виде:

$$(ma + j) - 2a + i_1 = x_{i_1} a. \quad (19)$$

Соотношение (19) запишем в виде:

$$(m - 2)a + j + i_1 = x_{i_1} a. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что при тех ограничениях, которые наложены на натуральные числа  $j$  и  $i_1$  соотношение (20) может выполняться лишь в одном случае, когда  $j + i_1 = a$ , то есть при  $i_1 = a - j$ . Коэффициент  $x_{i_1}$  будет целым и положительным:  $x_{i_1} = m - 1 \geq 1$ .

Итак, соотношение (8) при  $y_{i_1} = a - 2$  имеет вид

$$(a - 1)b - a - j = (m - 1)a + (a - 2)b. \quad (21)$$

Предположим теперь, что соотношение (8) при значении коэффициента  $y_{i_k} = a - (k + 1), k \in \{1, 2, \dots, a - 2\}$  имеет вид

$$(a - 1)b - 2a + i_k = x_{i_k} a + (a - (k + 1))b, \quad (22)$$

где целочисленный коэффициент  $x_{i_k}$  удовлетворяет условию  $x_{i_k} \geq 1$ , и докажем, что соотношение (8) при  $y_{i_{k+1}} = a - (k + 2)$  имеет вид

$$(a - 1)b - 2a + i_{k+1} = x_{i_{k+1}} a + (a - (k + 2))b, \quad (23)$$

где целочисленный коэффициент  $x_{i_{k+1}} > x_{i_k} \geq 1$ .

Вычтем из соотношения (23) соотношение (22):

$$i_{k+1} - i_k = (x_{i_{k+1}} - x_{i_k})a - ma - j. \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что если  $x_{i_{k+1}} - x_{i_k} = m$ , то есть  $x_{i_{k+1}} = x_{i_k} + m$ , то  $i_{k+1} - i_k = -j$ , то есть  $i_{k+1} = i_k - j$ , если  $i_k - j > 0$ .

В противном случае нужно положить  $x_{i_{k+1}} - x_{i_k} = m + 1$ , то есть

$$i_{k+1} = a + i_k - j, \text{ если } i_k - j < 0.$$

В обоих случаях, как мы видим, коэффициент  $x_{i_{k+1}}$  является целочисленным, причем  $x_{i_{k+1}} > x_{i_k} \geq 1$ .

Рассмотрим отдельно соотношение (8) для случая, когда  $k = a - 1$ :

$$(a - 1)b - 2a + i_{a-1} = x_{i_{a-1}}a. \quad (25)$$

С учетом того, что  $b = ma + j$ , соотношение (25) запишем в виде:

$$(m(a - 1) + j - 2)a + i_{a-1} - j = x_{i_{a-1}}a. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что при тех ограничениях, которые наложены на натуральные числа  $j$  и  $i_{a-1}$  соотношение (26) может выполняться лишь в одном случае, когда  $i_{a-1} = j$ , то есть  $x_{i_{a-1}} = m(a - 1) + j - 2 > 0$ .

Докажем теперь, что набор чисел  $i_1, i_2, \dots, i_{a-1}$  является одной из перестановок чисел  $1, 2, \dots, a - 1$ . Для этого достаточно показать, что все числа  $i_k, k \in \{1, 2, \dots, a - 1\}$ , различны. Предположим противное, то есть, нашлись два числа  $i_k = i_l, l \in \{1, 2, \dots, a - 1\}, l > k$ . Тогда, вычитая из соотношения

$$(a - 1)b - 2a + i_l = x_{i_l}a + (a - (l + 1))b \quad (27)$$

соотношение (22), получим соотношение

$$0 = (x_{i_l} - x_{i_k})a + (k - l)b, \quad (28)$$

которое равносильно равенству

$$(l - k)b = (x_{i_l} - x_{i_k})a. \quad (29)$$

Поскольку числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, то в разложении числа  $(l - k)$  должны присутствовать все простые числа, на которые разлагается число  $a$ . Но это противоречит тому, что  $(l - k) < a$ .

Итак, мы доказали, что соотношение (8) выполняется при всех значениях  $y_i = a - (i + 1), i = \overline{1, a - 1}$ , причем коэффициенты  $x_i$  являются целочисленными и удовлетворяют условию  $x_i \geq 1, i = \overline{1, a - 1}$ .

А это означает, что все числа  $(a - 1)b - 3a + i, i = \overline{1, a - 1}$ , могут быть представлены в виде следующей целочисленной неотрицательной комбинации:

$$(a - 1)b - 3a + i = (x_i - 1) * a + y_i * b + 0 * F_2 + 0 * F_3. \quad (30)$$

Заметим, что все числа  $(a - 1)b - 3a + i, i = \overline{0, a - 1}$  меньше, чем числа  $F_2$  и  $F_3$ , поэтому их представление в виде целочисленной неотрицательной комбинации в полугруппах  $G(a, b, F_2)$  и  $G(a, b, F_2, F_3)$  совпадает с представлением в полугруппе  $G(a, b)$ .

Поэтому, если предположить, что число  $(a - 1)b - 3a$  может быть представлено в виде целочисленной неотрицательной комбинации чисел  $a, b, F_2, F_3$ , то есть, в виде целочисленной неотрицательной комбинации чисел  $a, b, F_2$ , то это противоречит тому, что число  $(a - 1)b - 2a$  является числом Фробениуса для этих трех чисел. Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $a, b \in N + 2, a < b < 2a, \text{НОД}(a, b) = 1$ . Тогда имеет место формула

$$F_4 = (a - 1)b - a - b. \quad (31)$$

**Доказательство.** Из формулы (2) следует, что для всех  $i \in N$  имеет место соотношение:

$$(a - 1)b - 2a + i \in G(a, b, \text{frob}(a, b)). \quad (32)$$

В дальнейшем из всех  $i \in N$  мы будем рассматривать лишь  $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ . Таким образом, для каждого  $i = \overline{1, a}$ , число  $(a - 1)b - 2a + i$  может быть представлено в виде неотрицательной целочисленной комбинации

$$(a - 1)b - 2a + i = x_i a + y_i b + z_i \text{frob}(a, b). \quad (33)$$

В частности, имея в виду формулу (33), при  $i = a$  имеем:

$$(a - 1)b - a = 0 * a + 0 * b + 1 * \text{frob}(a, b). \quad (34)$$

Поскольку при  $i = \overline{1, a - 1}$ , число  $(a - 1)b - 2a + i$  меньше, чем  $\text{frob}(a, b)$ , то справедливо соотношение:

$$(a - 1)b - 2a + i = x_i * a + y_i * b. \quad (35)$$

Вначале докажем формулу (31) для двух случаев:

огда  $b = a + 1$ ,

огда  $b = a + (a - 1) = 2a - 1$ .

В первом случае число

$$F_3 - 1 = \text{frob}(a, b) - a - 1 = \text{frob}(a, b) - b \quad (36)$$

нельзя представить в виде неотрицательной целочисленной комбинации вида  $x_1 * a + y_1 * b$ , так как это противоречит понятию числа Фробениуса  $\text{frob}(a, b)$ .

Во втором случае докажем, что все числа вида

$$(a - 1)b - 2a + i, i \in \{1, 2, \dots, a - 1\} \quad (37)$$

можно представить в виде неотрицательной целочисленной комбинации вида (35), причем, коэффициенты  $x_i, i \in \{1, 2, \dots, a - 1\}$ , имеют следующий вид

$$x_i = (2i - 2). \quad (38)$$

Действительно, имея в виду, что  $b = 2a - 1$ , получим:

$$(a - 1)b - 2a + i = (a - i - 1)b + ib - 2a + i = (a - i - 1)b + i(2a - 1) - 2a + i = (2i - 2) * a + (a - i - 1)b.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты  $x_i, i \in \{2, \dots, a - 1\}$ , строго положительны. Поэтому все числа вида

$$(a - 1)b - 3a + i, i \in \{2, \dots, a - 1\}, \quad (39)$$

могут быть представлены в виде неотрицательной целочисленной комбинации вида:

$$(a - 1)b - 3a + i = (x_i - 1) * a + (a - i - 1)b. \quad (40)$$

При этом, число  $(a - 1)b - 3a + 1 = \text{frob}(a, b) - b$  не может быть представлено в виде неотрицательной целочисленной комбинации вида  $x_1 * a + y_1 * b$ , так как это противоречит понятию числа Фробениуса  $\text{frob}(a, b)$ .

Теперь рассмотрим общий случай, когда

$$b = a + j, j \in \{2, 3, \dots, a - 1\}. \quad (42)$$

Так как  $-2a + i < 0$ , то для выполнения соотношения (35) с неотрицательными целочисленными коэффициентами  $x_i$  и  $y_i$  значения коэффициентов  $y_i$  должны быть меньше, чем  $(a - 1)$ .

Ниже для всех неотрицательных целочисленных значений  $y_i, i = \overline{1, j-1}$ , меньших значения  $(a-1)$ , мы найдем конкретные значения коэффициентов  $x_i, i = \overline{1, a-1}$ , и убедимся в том, что они целочисленные, неотрицательные и удовлетворяют условию

$$x_i > 0, i = \overline{2, a-1}. \quad (43)$$

Применим метод математической индукции.

Вначале покажем, что для значения  $y_{i_1} = a-2$  выполняется формула (35), то есть, имеет место соотношение

$$(a-1)b - 2a + i_1 = x_{i_1} * a + (a-2) * b, \quad (44)$$

причем, коэффициент  $x_{i_1}$  является целочисленным и неотрицательным.

Действительно, перенесем  $(a-2) * b$  из правой части соотношения (44) в левую и запишем его в виде:

$$b - 2a + i_1 = x_{i_1} a. \quad (45)$$

С учетом того, что  $b = a + j$ , соотношение (45) запишем в виде:

$$j - a + i_1 = x_{i_1} a. \quad (46)$$

Нетрудно видеть, что при тех ограничениях, которые наложены на натуральные числа  $j$  и  $i_1$  соотношение (46) может выполняться лишь в одном случае, когда  $x_{i_1} = 0$ , то есть  $i_1 = a - j > 0$ .

Предположим теперь, что соотношение (35) при

$$y_{i_k} = a - (k + 1), k \in \{1, 2, \dots, a - 2\}$$

имеет вид

$$(a-1)b - 2a + i_k = x_{i_k} a + (a - (k + 1))b, \quad (47)$$

где коэффициент  $x_{i_k}$  является целочисленным и неотрицательным.

Докажем, что соотношение (35) при  $y_{i_{k+1}} = a - (k + 2)$  имеет вид

$$(a-1)b - 2a + i_{k+1} = x_{i_{k+1}} a + (a - (k + 2))b, \quad (48)$$

где целочисленный коэффициент  $x_{i_{k+1}} > x_{i_k} \geq 0$ .

Вычтем из соотношения (48) соотношение (47):

$$i_{k+1} - i_k = (x_{i_{k+1}} - x_{i_k})a - b. \quad (49)$$

Соотношение (49) запишем в виде

$$i_{k+1} - i_k + j = (x_{i_{k+1}} - x_{i_k} - 1)a. \quad (50)$$

Нетрудно видеть, что при тех ограничениях, которые наложены на натуральные числа  $j, i_k$  и  $i_{k+1}$  соотношение (50) может выполняться лишь в двух случаях.

Во-первых, при условии, что  $x_{i_{k+1}} - x_{i_k} - 1 = 0$ , то есть  $i_{k+1} = i_k - j$ , если  $i_k - j > 0$ .

А во-вторых, при условии, что  $x_{i_{k+1}} - x_{i_k} - 1 = 1$ , то есть  $i_{k+1} = i_k + a - j > 0$ , если  $i_k - j < 0$ .

В обоих случаях коэффициент  $x_{i_{k+1}}$  будет целочисленным и положительным  $x_{i_k} > x_{i_{k-1}} \geq 0$ .

Итак, для всех  $k = \overline{1, a-2}$ , справедливо соотношение (47), где коэффициенты  $x_{i_k}, k = \overline{2, a-2}$ , являются целочисленными и положительными.

Рассмотрим отдельно соотношение (47) для случая, когда  $k = a - 1$ :

$$(a-1)b - 2a + i_{a-1} = x_{i_{a-1}} a. \quad (51)$$

С учетом того, что  $b = a + j$ , соотношение (51) запишем в виде:

$$(a+j-3)a + i_{a-1} - j = x_{i_{a-1}} a. \quad (52)$$

Нетрудно видеть, что при тех ограничениях, которые наложены на натуральные числа  $j$  и  $i_{a-1}$  соотношение (52) может выполняться лишь в одном случае, когда  $i_{a-1} = j$ , то есть  $x_{i_{a-1}} = a + j - 3 > 0$ .

Так же, как в доказательстве теоремы 1, доказывается, что набор чисел  $i_1, i_2, \dots, i_{a-1}$  является одной из перестановок чисел  $1, 2, \dots, a - 1$ .

В итоге, с учетом соотношения (47), можно утверждать, что для каждого значения  $k = \overline{2, a-1}$ , имеет место соотношение

$$(a-1)b - 3a + i_k = (x_{i_k} - 1)a + (a - (k + 1))b, \quad (53)$$

В то же время для  $k = 1$  мы получили соотношение

$$(a-1)b - 2a + i_1 = 0 * a + (a - 2) * b, \quad (54)$$

где  $i_1 = a - j$ .

Нетрудно видеть, что число

$$(a-1)b - 3a + i_1 = (a-1)b - a - b \quad (55)$$

не может быть представлено в виде линейной неотрицательной комбинации  $x_1 * a + y_1 * b$ , ибо это противоречит понятию числа  $F_2 = (a-1)b - a$ .

Заметим, что все числа  $(a-1)b - 3a + i, i = \overline{0, a-1}$  меньше, чем числа  $F_2$  и  $F_3$ , поэтому их представление в виде целочисленной неотрицательной комбинации в полугруппах  $G(a, b, F_2)$  и  $G(a, b, F_2, F_3)$  совпадает с соответствующим представлением в полугруппе  $G(a, b)$ . Таким образом, число  $(a-1)b - a - b$  не может быть представлено в виде целочисленной неотрицательной комбинации чисел  $a, b, F_2, F_3$ .

Далее, так как набор чисел  $i_1, i_2, \dots, i_{a-1}$ , в котором известно первое число  $i_1 = a - j$  и последнее число  $i_{a-1} = j$ , является одной из перестановок чисел  $1, 2, \dots, a - 1$ , то среди чисел, заданных соотношением (47), обязательно найдутся числа, равные соответственно

$$(a-1)b - a - b + i, i \in \{1, 2, \dots, (b-a) - 1\}, \quad (56)$$

представимые в виде целочисленной неотрицательной комбинации чисел  $a, b, F_2, F_3$ , что и означает завершение доказательства теоремы 2.

**Пример 1.** Пусть  $a = 5, m = 2, j = 3, b = 13$ .

$$frob(5,13) = (a-1)b - a = 47,$$

$$frob(5,11,47) = (a-1)b - 2a = 42,$$

$$frob(5,11,42,47) = (a-1)b - 3a = 37.$$

**Пример 2.** Пусть  $a = 5, m = 1, j = 3, b = 8$ .

$$frob(5,8) = (a-1)b - a = 27,$$

$$frob(5,8,27) = (a-1)b - 2a = 22,$$

$$frob(5,8,22,27) = (a-1)b - a - b = 19.$$

**Литература**

Alfonsin J. R. The Diophantine Frobenius Problem. Oxford University Press, 2005. 243 p.

Шевченко В.Н. Задача о размене, задача Фробениуса и задача групповой минимизации // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. – Горький: Издательство Горьковского университета, 1982. С. 166 - 179.

Shevchenko V. N., Qualitative topics of linear and integer programming. AMS, Providence, Rhode Island, 1996.

Selmer E.S. and Beyer O., On the linear Diophantine problem of Frobenius in three variables, J. Reine Angewandte Math. 301,1978, pp.161–170.

Rodseth O.J., On a linear Diophantine problem of Frobenius, J. Reine Angewandte Math. 301,1978, pp.171–178.

F. Curtis. On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup. Math. Scand. 67, 1990. – pp. 190 – 192.

Greenberg H., Solution to a Diophantine Equation for nonnegative integers, J. Algorithm., 9(3),1988, pp.343–353.

Савельев В. П. Задачи дискретной и непрерывной оптимизации. Число Фробениуса. Издательство LAP LAMBERT Academic Publishing, 2020. 134 с.

Савельев В.П., Шевченко В.Н. О двух свойствах числа Фробениуса // Международный научно – исследовательский журнал, выпуск №9 (123), 2022, с.1-5.

# Евразийский Союз Ученых.

## Серия: технические и физико-математические науки

Ежемесячный научный журнал

№ 3 (106)/2023 Том 2

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**Макаровский Денис Анатольевич**

AuthorID: 559173

Заведующий кафедрой организационного управления Института прикладного анализа поведения и психолого-социальных технологий, практикующий психолог, специалист в сфере управления образованием.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Штерензон Вера Анатольевна**

AuthorID: 660374

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт новых материалов и технологий (Екатеринбург), кандидат технических наук

**Синьковский Антон Владимирович**

AuthorID: 806157

Московский государственный технологический университет "Станкин", кафедра информационной безопасности (Москва), кандидат технических наук

**Штерензон Владимир Александрович**

AuthorID: 762704

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт фундаментального образования, Кафедра теоретической механики (Екатеринбург), кандидат технических наук

**Зыков Сергей Арленович**

AuthorID: 9574

Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, Отдел теоретической и математической физики, Лаборатория теории нелинейных явлений (Екатеринбург), кандидат физ-мат. наук

**Дронсейко Виталий Витальевич**

AuthorID: 1051220

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Кафедра "Организация и безопасность движения" (Москва), кандидат технических наук

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна. Материалы публикуются в авторской редакции.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Художник: Валегин Арсений Петрович  
Верстка: Курпатова Ирина Александровна

Адрес редакции:  
198320, Санкт-Петербург, Город Красное Село, ул. Геологическая, д. 44, к. 1, литера А  
E-mail: [info@euroasia-science.ru](mailto:info@euroasia-science.ru) ;  
[www.euroasia-science.ru](http://www.euroasia-science.ru)

Учредитель и издатель ООО «Логика+»  
Тираж 1000 экз.