

Евразийский Союз Ученых. Серия: технические и физико-математические науки

Ежемесячный научный журнал
№ 2 (105)/2023 Том 1

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Макаровский Денис Анатольевич

AuthorID: 559173

Заведующий кафедрой организационного управления Института прикладного анализа поведения и психолого-социальных технологий, практикующий психолог, специалист в сфере управления образованием.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

• **Штерензон Вера Анатольевна**

AuthorID: 660374

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт новых материалов и технологий (Екатеринбург), кандидат технических наук

• **Синьковский Антон Владимирович**

AuthorID: 806157

Московский государственный технологический университет "Станкин", кафедра информационной безопасности (Москва), кандидат технических наук

• **Штерензон Владимир Александрович**

AuthorID: 762704

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт фундаментального образования, Кафедра теоретической механики (Екатеринбург), кандидат технических наук

• **Зыков Сергей Арленович**

AuthorID: 9574

Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, Отдел теоретической и математической физики, Лаборатория теории нелинейных явлений (Екатеринбург), кандидат физ-мат. наук

• **Дронсейко Виталий Витальевич**

AuthorID: 1051220

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Кафедра "Организация и безопасность движения" (Москва), кандидат технических наук

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна. Материалы публикуются в авторской редакции.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Художник: Валегин Арсений Петрович
Верстка: Курпатова Ирина Александровна

Адрес редакции:
198320, Санкт-Петербург, Город Красное Село, ул. Геологическая, д. 44, к. 1, литера А
E-mail: info@euroasia-science.ru ;
www.euroasia-science.ru

Учредитель и издатель ООО «Логика+»
Тираж 1000 экз.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Бондарчук В.В., Кравченко Н.М., Ключанова Т.Д.

ТЕХНОЛОГИИ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АССИСТЕНТА ДИАГНОСТИКИ МЕТАДААННЫХ 3

Вадова Л.Ю.

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА СИНТЕЗА ЭПИХЛОРИДРИНА..... 10

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Абдыманапов У.

ХИРУРГИЯ УИЛЬЯМА ПОЛА ТЁРСТОНА В СКЛЕЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЗВЕЗДНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ В ТРЕХ И БОЛЕЕ ИЗМЕРЕНИЯХ 16

Во Ань Хиеу

ПОСТРОЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ 37

Шарый П.А., Шарая Л.С.

ИНВАРИАНТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ 44

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 004.045

ТЕХНОЛОГИИ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АССИСТЕНТА ДИАГНОСТИКИ МЕТАДАНЫХ

Бондарчук Виктория Валерьевна*кандидат технических наук,**заведующий отделом распознавания зрительных образов,***Кравченко Наталья Михайловна***кандидат технических наук,**старший научный сотрудник, с.н.с. отдела РЗО,***Клюшанова Татьяна Дмитриевна,***ведущий инженер отдела РЗО**Институт проблем искусственного интеллекта, г. Донецк*

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.105.1763

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена технологиям реализации интеллектуального ассистента диагностики метаданных, моделированию программного обеспечения для управления метаинформационными ресурсами процесса баротерапии. Представлены управляющие элементы и механизмы системы, программные модули, диалоговые интерфейсы экспертной системы

ABSTRACT

The work is devoted to technologies for implementing an intelligent assistant for metadata diagnostics, modeling software for managing metainformation resources of the barotherapy process. The control elements and mechanisms of the system, program modules, dialog interfaces of the expert system are presented

Keywords: program modules, control elements, system mechanisms, dialog interfaces

Ключевые слова: программные модули, управляющие элементы, механизмы системы, диалоговые интерфейсы

Проблема интерпретации данных мониторинга жизненно важных показателей экспертной системой диагностики является актуальной. Для ее решения необходимы исследование и развитие научных основ средств и методов определения функциональных показателей объекта в процессе гипербарической оксигенации (ГБО) на основе ритмокардиографии как эффективного средства оценки положительного функционального воздействия с учетом эндогенных, экзогенных факторов и неконтролируемых воздействий ГБО на объект, определение выбора оптимальных режимов управления. Одной из задач реализации экспертной системы является выявление тенденций возникновения неконтролируемого процесса во время сеанса гипербарической оксигенации с учетом экзогенных и эндогенных факторов; на этом основании разработать подходы к выбору принятия решений [1, с. 391-399].

Разработанные методические положения формализации представлением их характеристик, математические модели программно-аппаратных средств компьютерного преобразования положены в основу алгоритмов разработанной системы, которая функционально состоит из трех подсистем: идентификация информации технических устройств, распознавания вариабельности сердечного ритма (ВСП) и формирования принятия решений [2, 137-142; 3, 20-23.]. Разработаны принципы построения и реализации экспертных систем процесса баротерапии, механизма оптимального взаимодействия, который

устанавливает однозначную связь между информационной системой, объектом и контролируемой внешней средой для получения стабильных и однозначных характеристик системы, соответствующих гипербарическому состоянию объекта. Предлагаемый подход обеспечивает контроль отслеживания профиля давления, предысторию процесса баротерапии. Изменение режимов барокамеры в зависимости от реального состояния пациента, определяемого по ВСП, позволяет нивелировать негативное воздействие процесса ГБО, исключить небезопасные тревожные ситуации или приостановить динамику процесса, и, тем самым, поддержать устойчивую работу системы с мощными инструментами лечения. Таким образом, обеспечивается взаимная адаптация объекта, окружающей среды и измерительной системы [4, с. 16-21].

Входами системы являются: данные о пациентах (возраст, вес, пол, диагноз, сопутствующие заболевания) и проведенных сеансах баротерапии (режим работы барокамеры: давление, время изопрессии), вносимые лечащим врачом-сотрудником центра гипербарической оксигенации; данные о состоянии пациента (сердечном ритме) в ходе сеанса лечения, зафиксированные аппаратурой Cardio+ и занесенные в базу данных Unicard; информация о пациентах, для которых планируется лечение сеансами ГБО.

Выходами системы являются: рассчитанные показатели вариабельности сердечного ритма

пациентов в ходе сеансов, представленные в виде таблиц и диаграмм; динамика показателей ВСП; протоколы сеансов баротерапии установленного формата; прогноз воздействия выбранного режима ГБО на определенного пациента.

Управляющие элементы системы: блок ввода и контроля исходной информации, блок обмена информацией с системой Unicard, алгоритмы поиска запрашиваемой пользователем информации в базе данных, алгоритмы расчета показателей variability сердечного ритма и динамики состояния пациента в ходе сеанса, алгоритм построения дерева решений, алгоритм прогноза воздействия баротерапии на пациента и поиска наиболее подходящего для данного пациента режима работы барокамеры, блок генерации выходных документов в форматах XLS и PDF.

Механизмами системы являются: интегрированная среда разработки программного обеспечения Borland Delphi 7; компоненты Microsoft ActiveX Data Objects (ADO) – технологии стандартного обращения к реляционным структурам данных – для импорта данных из системы Unicard; компоненты, поддерживающие технологию OLE (применяется для связывания объектов, созданных различными приложениями) – для импорта подготовленной ранее информации о сеансах и выбранных режимах работы барокамеры, экспорта результатов расчетов в таблицы Excel; виртуальный PDF-принтер – для создания протоколов лечения в PDF-формате.

Разработаны программные модули:

Главное окно ЭС АБ содержит главное меню для доступа к основным возможностям системы. Кроме того, здесь отображается информация о пациентах и сеансах лечения, хранящаяся в базе данных.

Модуль импорта из базы данных системы Cardio+. Чтение данных о пациентах и их состоянии во время сеансов баротерапии из формата MS Access и двоичных файлов, преобразование их к нужному виду и затем запись в базу данных Paradox.

Модуль импорта данных из Excel. Чтение данных о режимах работы барокамеры во время сеансов лечения каждого пациента. Запись данных в базу Paradox.

Модуль работы с базой данных. Реализация доступа к базе данных для ее пополнения новыми данными, поиска нужной информации.

Модуль сбора информации о пациенте. Ввод данных о новом пациенте и сохранение их в базе данных.

Модуль расчета параметров ВСП. Расчет различных статистических показателей, характеризующих variability сердечного ритма пациента в ходе каждого 5-минутного этапа сеанса баротерапии.

Модуль графического отображения динамики показателей ВСП. Представление в виде диаграмм

динамики изменения показателей variability в каждом сеансу и по всему курсу лечения.

Модуль записи результатов расчета показателей variability в электронные таблицы MS Excel. Необходимо предусмотреть различные варианты формирования таблиц: по одному сеансу пациента – для сравнения 5-минутных этапов между собой, по всем сеансам для одного пациента – для оценки динамики состояния пациента в процессе лечения, по выбранной определенным образом группе пациентов.

Модуль записи протокола сеанса в формате PDF. Записываются основные данные о пациенте и результатах баротерапии в ходе одного сеанса. Представление показателей ВСП в числовом и графическом виде.

Модуль поиска первоначального режима лечения. На основе информации о новом пациенте и данных о результатах баротерапии других пациентов выбирается наиболее подходящий режим работы барокамеры для первого сеанса лечения нового пациента.

Модуль корректировки режима лечения. По результатам первого сеанса лечения (динамике показателей ВСП в ходе сеанса) режим работы барокамеры для последующих сеансов может быть изменен.

Модуль формирования рекомендаций для врача. Результаты выбора первоначального режима лечения и корректировки настроек работы барокамеры в последующих сеансах представляются в удобном для использования виде (формат MS Word).

В базе данных системы поддержки принятия решений по процессу баротерапии реализован доступ к информации о пациентах, проходивших лечение в центре ГБО, и проведенных сеансах терапии. Информация о состоянии пациентов в ходе сеансов баротерапии получена путем обмена данными с БД системы Кардио+, которая фиксирует данные в ходе сеансов в барокамерах. Информацию о каждом пациенте и режимах работы барокамеры при каждом сеансе врач оформляет в виде таблицы Excel, которая затем программно переносится в экспертную систему и в дальнейшем пополняет базу знаний.

Главное окно приложения содержит информацию о проходивших лечение пациентах (рис. 1). Данные о пациентах в отображаемом списке, могут быть отфильтрованы по выбранным пользователем критериям (рис. 2,3). Для указанного пациента в этом же окне справа показан список пройденных сеансов лечения. Выбрав определенного пациента, можно получить подробную информацию по нему и по каждому сеансу лечения (рис. 4), рассчитать показатели variability сердечного ритма и определить динамику состояния пациента от сеанса к сеансу.

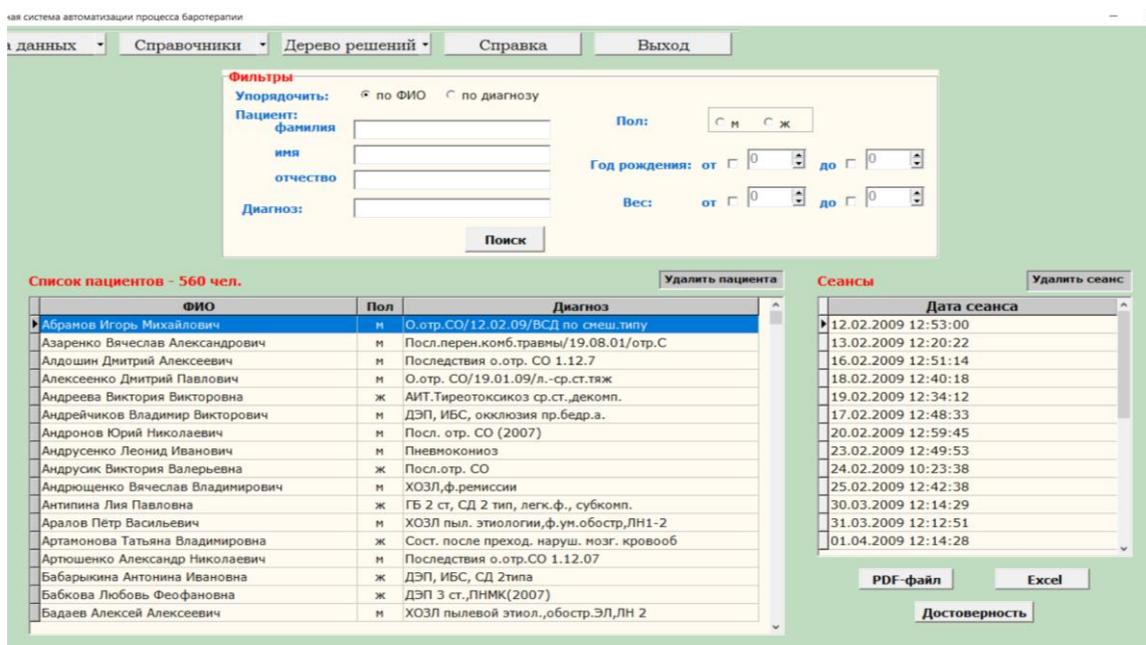


Рис. 1. Главное окно приложения

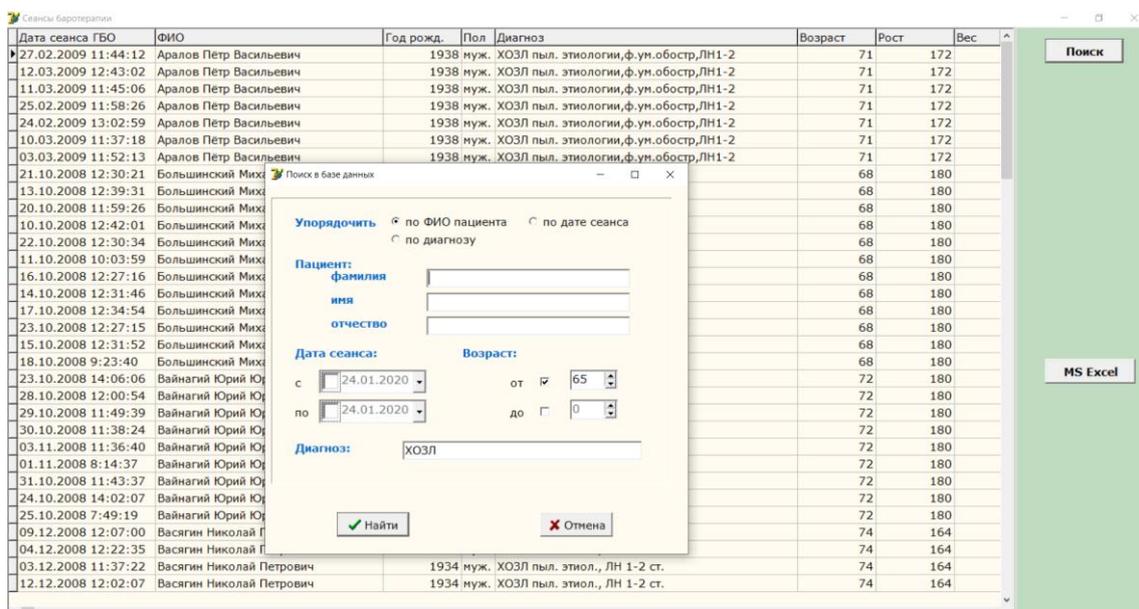


Рис. 2. Поиск информации в БД по заданным критериям (возраст и диагноз пациента)

Изменение показателей ВСП можно оценить по их представлению в табличном виде (рис. 5) или в виде диаграммы (рис. 6,7). Накопленная в базе знаний информация о пациентах, режимах работы барокамеры и результатах лечения используется для прогноза действия баротерапии на новых

пациентов и выбора первоначального режима ГБО, для определения параметров работы барокамеры для последующих сеансов лечения. Для решения этой задачи по имеющимся данным строится дерево решений (рис. 8).

Сеансы баротерапии

| Дата сеанса ГБО | ФИО | Год рожд. | Пол | Диагноз | Возраст | Рост | Вес |
|---------------------|------------------------------|-----------|------|---|---------|------|-----|
| 27.02.2009 11:44:12 | Аралов Петр Васильевич | 1938 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиологии, ф. ун. обостр, ЛН1-2 | 71 | 172 | |
| 12.03.2009 12:43:02 | Аралов Петр Васильевич | 1938 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиологии, ф. ун. обостр, ЛН1-2 | 71 | 172 | |
| 11.03.2009 11:45:06 | Аралов Петр Васильевич | 1938 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиологии, ф. ун. обостр, ЛН1-2 | 71 | 172 | |
| 25.02.2009 11:58:06 | Аралов Петр Васильевич | 1938 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиологии, ф. ун. обостр, ЛН1-2 | 71 | 172 | |
| 24.02.2009 13:02:59 | Аралов Петр Васильевич | 1938 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиологии, ф. ун. обостр, ЛН1-2 | 71 | 172 | |
| 10.03.2009 11:37:18 | Аралов Петр Васильевич | 1938 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиологии, ф. ун. обостр, ЛН1-2 | 71 | 172 | |
| 03.03.2009 11:52:13 | Аралов Петр Васильевич | 1938 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиологии, ф. ун. обостр, ЛН1-2 | 71 | 172 | |
| 21.10.2008 12:30:21 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 13.10.2008 12:39:31 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 20.10.2008 11:59:26 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 10.10.2008 12:42:01 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 22.10.2008 12:30:34 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 11.10.2008 10:03:59 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 16.10.2008 12:27:16 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 14.10.2008 12:31:46 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 17.10.2008 12:34:54 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 23.10.2008 12:27:15 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 15.10.2008 12:31:52 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 18.10.2008 9:23:40 | Большинский Михаил Абрамович | 1940 | муж. | ХОЗЛ 2 ст | 68 | 180 | |
| 23.10.2008 14:06:06 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 28.10.2008 12:00:54 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 29.10.2008 11:49:39 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 30.10.2008 11:38:24 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 03.11.2008 11:36:40 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 01.11.2008 8:14:37 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 31.10.2008 11:43:37 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 24.10.2008 14:02:07 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 25.10.2008 7:49:19 | Вайнагий Юрий Юрьевич | 1936 | муж. | ХОЗЛ ИБС | 72 | 180 | |
| 09.12.2008 12:07:00 | Васягин Николай Петрович | 1934 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиол., ЛН 1-2 ст. | 74 | 164 | |
| 04.12.2008 12:22:35 | Васягин Николай Петрович | 1934 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиол., ЛН 1-2 ст. | 74 | 164 | |
| 03.12.2008 11:37:22 | Васягин Николай Петрович | 1934 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиол., ЛН 1-2 ст. | 74 | 164 | |
| 12.12.2008 12:02:07 | Васягин Николай Петрович | 1934 | муж. | ХОЗЛ пыл. этиол., ЛН 1-2 ст. | 74 | 164 | |

Поиск

MS Excel

Рис. 3. Результаты поиска в БД

Личные данные

Фамилия: Абрамов Имя: Игорь

Отчество: Михайлович

Год рождения: 1960

Адрес: fdfdfdf

Телефон:

Работа:

Рост: 172 Вес: 92

Диагноз: О.отр.СО/12.02.09/ВСД по смеш.типу

Код диагноза осн.: 17 Код диагноза соп.: 9

Редактировать

Сеансы

Дата сеанса

12.02.2009 12:53:00

13.02.2009 12:20:22

16.02.2009 12:51:14

18.02.2009 12:40:18

19.02.2009 12:34:12

17.02.2009 12:48:33

20.02.2009 12:59:45

23.02.2009 12:49:53

24.02.2009 10:23:38

25.02.2009 12:42:38

30.03.2009 12:14:29

31.03.2009 12:12:51

Расчет ВСР Excel средних

Диаграмма Диаграмма 3D

Диаграмма Диаграмма Excel

Информация о сеансе

Дата: 12.02.2009 12:53:00

Давление (ати) Экспозиция (мин)

Давление пациента

До сеанса: 120/ После сеанса: 120/80

Динамика сеанса: слабо положительная

Редактировать

Диаграмма средних

Выбор параметров следующего сеанса

Excel динамика сеансов

Рис. 4. Информация по выбранному пациенту

Параметры ВСР

Пациент: Абрамов Игорь Михайлович

Возраст: 49 Дата сеанса: 12.02.2009

| № этапа | Статистические показатели | | | Вариационная пульсометрия | | | Спектральный анализ | | | ПАРС | |
|----------------|---------------------------|----------------|-----------------|---------------------------|-------------|-------------------|---------------------|-------------|-------------|------|--|
| | Mean, мс | HR, уд./мин. | SDNN, мс | RMSSD, мс | SDSD, мс | pNN50, % | CVr, % | As | Ex | | |
| НОРМЫ | 832 - 1017 | 60 - 90 | 30 - 100 | 20 - 55.3 | | 4.5 - 31.9 | 3 - 12 | | | | |
| 1 | 741 | 81 | 53 | 23 | 16 | 4,1 | 7,2 | 0,0 | -0,2 | | |
| 2 | 770 | 78 | 51 | 24 | 15 | 3,9 | 6,6 | -0,1 | -0,8 | | |
| 3 | 774 | 78 | 48 | 23 | 15 | 4,2 | 6,2 | -0,7 | 0,3 | | |
| 4 | 765 | 78 | 61 | 24 | 16 | 3,6 | 8,0 | -0,2 | 0,1 | | |
| 5 | 779 | 77 | 51 | 25 | 17 | 4,0 | 6,5 | 0,0 | 0,3 | | |
| 6 | 761 | 79 | 55 | 25 | 17 | 4,9 | 7,2 | 0,1 | -0,5 | | |
| 7 | 788 | 76 | 51 | 26 | 17 | 4,8 | 6,5 | 0,0 | -0,1 | | |
| 8 | 787 | 76 | 49 | 26 | 18 | 7,0 | 6,2 | -0,1 | 0,4 | | |
| 9 | 799 | 75 | 50 | 26 | 16 | 7,1 | 6,3 | -0,1 | 0,1 | | |
| 10 | 821 | 73 | 58 | 27 | 18 | 6,4 | 7,1 | -0,4 | -0,2 | | |
| 11 | 813 | 74 | 54 | 27 | 18 | 7,2 | 6,6 | -0,2 | -0,5 | | |
| 12 | 783 | 77 | 56 | 24 | 16 | 4,0 | 7,2 | 0,1 | -0,2 | | |
| 13 | 816 | 74 | 62 | 30 | 19 | 9,7 | 7,6 | -0,4 | -0,3 | | |
| 14 | 810 | 74 | 56 | 27 | 18 | 4,6 | 6,9 | 0,1 | -0,2 | | |
| Среднее | 786,2 | 76,4 | 53,9 | 25,5 | 16,9 | 5,4 | 6,9 | -0,1 | -0,1 | | |

Сохранить в Excel

Рис. 5. Результаты расчета показателей ВСР для одного сеанса лечения одного пациента

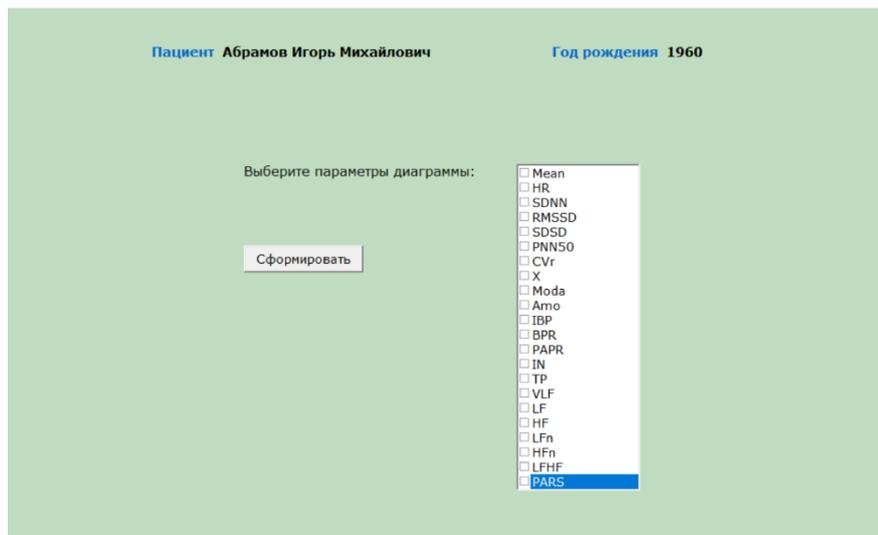


Рис. 6. Выбор параметров VCP для отображения в виде диаграммы



Рис. 7. Результаты расчета показателей VCP в графическом виде

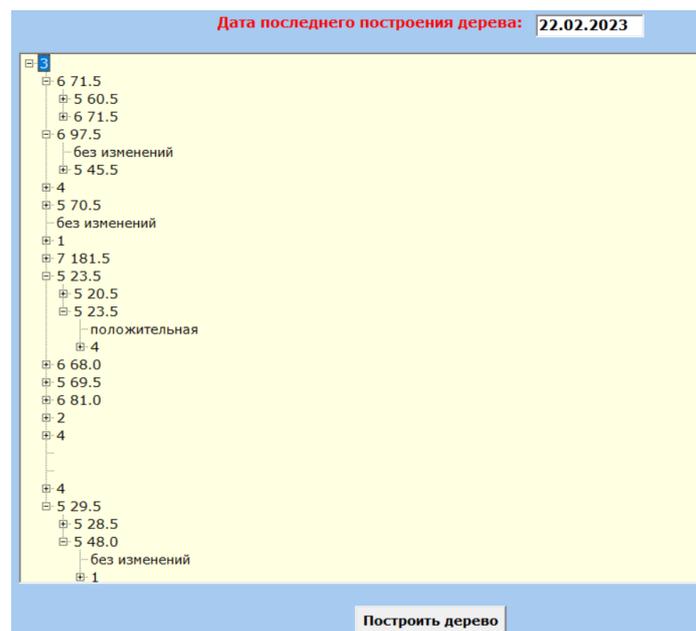


Рис. 8. Пример построения дерева решений

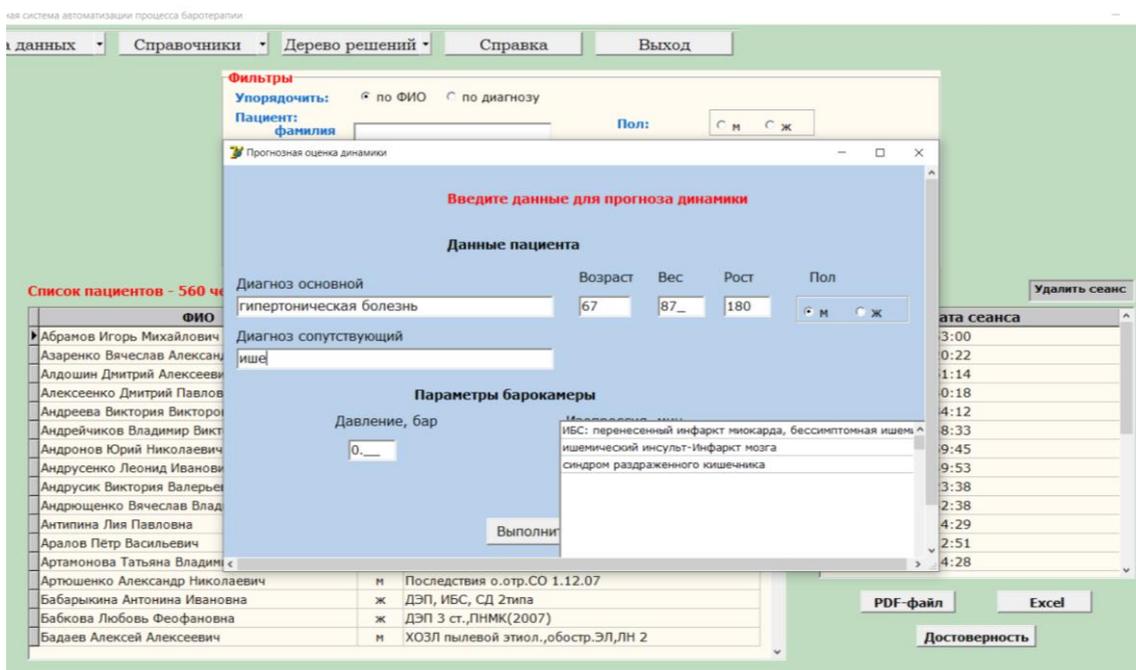


Рис. 9. Ввод исходных данных для прогнозной оценки динамики

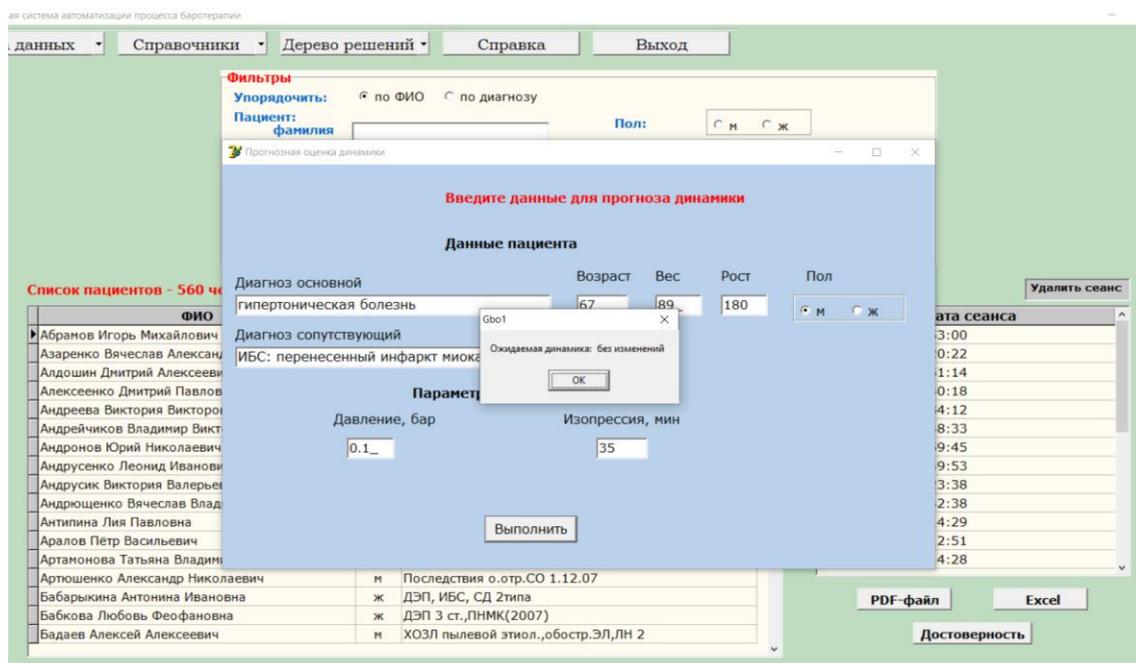


Рис. 10. Результаты прогноза динамики состояния больного

Разработанные технологии реализации интеллектуального ассистента диагностики метаданных позволяют решать основные задачи экспертной системы поддержки принятия решений в процессе баротерапии, проводить функциональный анализ состояния пациента во время сеанса гипербарической оксигенации на основании исследования variability сердечного ритма, его статистического и спектрального анализа, отображения графических показателей [5-7]. Разработанное программное обеспечение позволяет исследовать, анализировать, формировать базу данных определенных параметров функционального состояния пациента. Данная программа, кроме

обработки параметров variability сердечного ритма, формирует базу данных, систему анализа, аналитические параметры регуляторной системы, на основании которой формируется система принятия решений. Технологические процессы работы системы визуализированы и адаптированы для эксперта. Таким образом, обеспечена для врача возможность получения рекомендаций от системы по корректировке режима ГБО после каждого сеанса. Данная система будет способствовать принятию решений относительно дальнейшего проведения сеанса гипербарической оксигенации не только на основании субъективного решения врача, но и на основании полученных программой многочисленных факторов. Кроме того,

разработанное программное обеспечение сравнивает значения показателей пациента с общепринятыми нормами и отображает их отклонения от нормы в процессе проведения сеанса баротерапии.

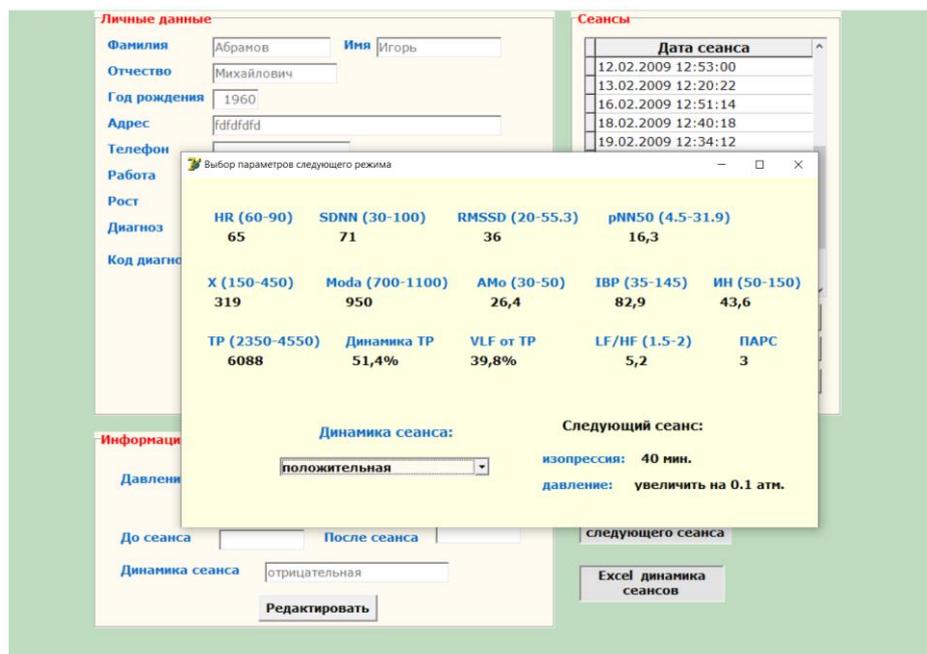


Рис. 11. Выбор параметров работы барокамеры для следующего сеанса лечения

ЛИТЕРАТУРА

Бондарчук, В. В. Методологические аспекты моделирования интеллектуальной системы поддержки принятия решений для формирования режимов гипербарической оксигенации [Текст] / В. В. Бондарчук, Е. Г. Ладария, Н. М. Кравченко // VI Международная научно-практическая конференция «Dynamics of the Development of World Science» 19-21 февраля 2020 года Ванкувер, Канада. 2020. 1000 p. – Pp.391-399. URL://https://sci-conf.com.ua

Bondarchuk Victoria V. Generation of the Intellectual Decision-Making Software for Forming Hyperbaric Oxidation Modes Prospects for Development [Текст] / Bondarchuk Victoria V., Ladaria Elena G., Kravchenko Nataliya M. // Eurasian scientific congress. Abstracts of the 2st International scientific and practical conference. «Eurasian Scientific Congress», Barca Academy Publishing. Barcelona, Spain. 24-25.02.2020. – Pp.137-142/ URL://https://sci-conf.com.ua

Бондарчук В.В., Ладария Е.Г., Кравченко Н.М., Ключанова Т.Д. Практические результаты создания интеллектуальной системы поддержки принятия решений для формирования режимов гипербарической оксигенации [Текст] / Отв. ред. к.э.н. Герман Юрьевич Гуляев // Актуальные вопросы современной науки и образования. Сборник статей V Международной научно-практической

конференции – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение», 2020. – 180с. – С. 20–23

Бондарчук В.В. Принципы построения и реализации экспертных интеллектуальных систем процесса взаимодействия гипербарического состояния и контролируемых параметров объектов. Евразийский Союз Ученых (ЕСУ). Ежемесячный научный журнал №81/ декабрь 12 / 2020 – с. 16-21 DOI: 10.3168/ESU.2020.1.75.8282.

Бондарчук В.В., Кравченко Н.М. Интерпретация событий генерирования программного обеспечения процесса баротерапии. EurasianUnionScientists, Серия: технические и физико-математические науки. Том 1. №10(91) стр. 9-13 https://doi.org/10.31618/ESU.2413-9335.2021.1.91.1502.

Н. М. Кравченко, Т. Д. Ключанова, В. В. Бондарчук, А.А. Гринцова, А.Ф. Денисенко. Мониторинг процесса баротерапии / Международный научно-теоретический журнал «Проблемы искусственного интеллекта» International Peer-Reviewed Scientific Journal «Problems of Artificial Intelligence» ISSN 2413-7383. - 2021. - № 2

Бондарчук В.В. «Theoretical aspects of rheocardiography visualization in expert barotherapy systems». Евразийский союз ученых. Серия: технические науки. Том 1 №8(89) сентябрь, 2021 г. стр. 3-5 DOI:10.31618/ESU.213-9335.2021.1.89.1427

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА СИНТЕЗА ЭПИХЛОРГИДРИНА

Вадова Л.Ю.

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева», Россия, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24

OPTIMIZATION OF EPICHLOROHYDRINE SYNTHESIS MODE

L.Y. Vadova

Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev,
Russia, 603950, Nizhny Novgorod, Minina str., 24
DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.105.1765

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена поиску оптимального режима синтеза эпихлоргидрина с точки зрения максимальной интегральной селективности. До настоящего времени основным промышленным способом производства эпихлоргидрина являлся хлоргидринный метод. В работе производится расчет системы уравнений материального баланса и функции максимальной интегральной селективности, а также разработка программного обеспечения для автоматических вычислений максимальной интегральной селективности эпихлоргидрина.

ABSTRACT

The article is devoted to the search for the optimal mode of epichlorohydrin synthesis from the point of view of maximum integral selectivity. To date, the main industrial method of epichlorohydrin production has been the chlorohydrin method. The paper calculates the system of equations of material balance and the function of maximum integral selectivity, as well as the development of software for automatic calculations of the maximum integral selectivity of epichlorohydrin.

Ключевые слова: синтез, селективность, эпихлоргидрин, материальный баланс.

Keywords: synthesis, selectivity, epichlorohydrin, material balance.

Введение

Эпихлоргидрин является важным промежуточным продуктом при изготовлении различных полимеров, смол, красителей, фармацевтических препаратов, эмульгаторов, смазок и адгезивов. До настоящего времени основным промышленным способом производства эпихлоргидрина являлся хлоргидринный метод. Он впервые был реализован компанией Shell в 1947 году. Его внедрение стало возможным после разработки способа получения хлористого аллила высокотемпературным хлорированием пропилена. Однако рассматриваемый метод имеет существенные недостатки, а именно, низкий коэффициент использования дефицитного хлора, применение на стадиях гипохлорирования и дегидрохлорирования крайне разбавленных водных растворов реагентов, что приводит к уменьшению производительности аппаратуры и образованию больших количеств загрязнённых сточных вод содержащих $CaCl_2$ и хлорорганические примеси, очистка от которых трудоемка и требует больших затрат.

Цель исследования

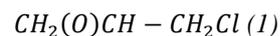
Главной целью исследования является поиск оптимального режима синтеза эпихлоргидрина с точки зрения максимальной интегральной селективности. Основные задачи, которые необходимо решить для достижения цели:

- изучение системы уравнений материального баланса;
- поиск функции максимальной интегральной селективности;
- вычисление точного значения функции максимальной интегральной селективности;

- разработка программного продукта, определяющего оптимальные значения химической реакции для получения максимальной селективности.

Материал и методы исследования

Объектом исследования является процесс синтеза эпихлоргидрина. Эпихлоргидрин – это высокотоксичное органическое вещество, хлорпроизводное окиси пропилена, имеющее формулу (1):



Используется для приготовления многочисленных веществ, преимущественно синтетических глицерина и немодифицированных эпоксидных смол. Он также используется в качестве строительного блока при изготовлении эластомеров и других полимеров, некоторые из которых применяются в системах водоснабжения. Его используют для получения различных производных глицидила, поверхностно-активных веществ, пластификаторов, красителей, фармацевтических препаратов, эмульгаторов, смазок и адгезивов. Эпихлоргидрин является важным промежуточным продуктом в производстве эпоксидных смол, хлоргидриновых каучуков и других органических продуктов.

Селективность - это показатель количества используемого реагента для получения целевого продукта в случае протекания параллельных или последовательных реакций, вследствие которых часть реагента расходуется на образование побочных продуктов. Таким образом, если в исследуемом процессе протекают две

параллельные реакции $A \rightarrow B$, $A \rightarrow D$ и целевым продуктом является B , а побочным D , масса которых выражается через G_B и G_D соответственно, то уравнение селективности будет представлено в следующем виде (см. формулу (2)):

$$\varphi_B = \frac{G_B}{G_B + G_D} \quad (2)$$

Так как общая масса полученных продуктов равна массе прореагировавшего вещества A ($G_B + G_D = G_{A_0} - G_A$), селективность можно рассматривать как отношение массы полученного целевого вещества B к массе превращенного реагента A (см. формулу (3)):

$$\varphi_B = \frac{G_B}{G_{A_0} + G_A} \quad (3)$$

Уравнение материального баланса составляется на основании закона сохранения массы вещества, согласно которому в замкнутой системе масса вступивших в реакцию веществ равна массе веществ, получившихся в результате пройденной реакции. Материальный баланс технологического процесса - это масса веществ, поступивших на технологическую операцию (приход), равная массе веществ, полученных в её результате (расход):

$$G_{\text{прих.}} = G_{\text{расх.}}$$

Материальный баланс составляется из расчёта расхода сырья и полученных продуктов на единицу основного продукта. Поскольку на практике приходится иметь дело не с чистыми веществами, а с сырьём сложного химического состава, при составлении материального баланса учитывается масса всех компонентов. Для этого используются данные анализов.

В подавляющем большинстве случаев масса вещества определяется для твердой, жидкой и газовой фаз. Таким образом, уравнение материального баланса имеет вид (4):

$$G_{(\text{тв.})} + G_{(\text{жид.})} + G_{(\text{газ.})} = G'_{(\text{тв.})} + G'_{(\text{жид.})} + G'_{(\text{газ.})} \quad (4),$$

где $G_{(\text{тв.})}$, $G_{(\text{жид.})}$, $G_{(\text{газ.})}$ - это масса поступающих в производство твердого, жидкого и газообразного вещества соответственно, а $G'_{(\text{тв.})}$, $G'_{(\text{жид.})}$, $G'_{(\text{газ.})}$ - это масса продуктов производства.

На практике не всегда присутствуют все три фазы, может быть несколько веществ в какой-то одной фазе, и тогда уравнение может упрощаться или усложняться. Нередко материальный баланс составляется для какой-нибудь одной фазы гетерогенного процесса, происходящего в реакторе. Тогда в процессе перехода веществ из одной фазы в другую масса веществ, поступающих в реактор в составе этой фазы, не равна массе веществ, выходящих из реактора. В реакторе

увеличивается или уменьшается масса веществ в данной фазе. В этом случае общее уравнение материального баланса, например, для газовой фазы, примет вид (5):

$$G_{(\text{газ.})} + G_{(\text{газ.})_H} = G'_{(\text{газ.})} + G'_{(\text{газ.})_Y} \quad (5)$$

где $G_{(\text{газ.})_H}$ - это масса веществ, накопившихся в реакторе, а $G'_{(\text{газ.})_Y}$ - это масса веществ, убывших из газовой фазы. Результаты расчетов сводятся в таблицу материального баланса по массе исходных веществ и продуктов реакции.

Результаты исследования и их обсуждение

Эффективность протекания реакции процесса оценивается по ряду технологических причин. Глубину превращений исходного сырья характеризует степень превращения (степень конверсии) (6):

$$\nu_a A + \nu_b B \leftrightarrow \nu_R R + \nu_S S \quad (6)$$

где $\nu_a, \nu_b, \nu_R, \nu_S$ - стехиометрические коэффициенты;

$$\Delta N_A = N_{A_0} - N_A \quad (7)$$

где N_{A_0} - начальное количество вещества A , N_A - текущее количество вещества A (к моменту, для которого рассчитываются степень превращения), ΔN_A - количество вещества A , превратившегося в продукт к данному моменту.

$$X_A = \frac{\text{количество превращенного вещества } A}{\text{исходного количество вещества } A} = \frac{\Delta N_A}{N_{A_0}} = \frac{N_{A_0} - N_A}{N_{A_0}}$$

Отсюда получаем, что при любой степени превращения можно рассчитать значение $N_A = N_{A_0}(1 - X_A)$. Аналогично можно рассчитать степень превращения и по любому другому веществу, например (8),

$$X_B = \frac{N_{B_0} - N_B}{N_{B_0}} \quad (8)$$

Если реакция протекает без изменения объёма, то от количественного показателя можно перейти к концентрации, разделив числитель и знаменатель на объём (9):

$$X_A = \frac{C_{A_0} - C_A}{C_{A_0}} \quad (9)$$

Если реакция идет по нескольким направлениям, то необходимо знать выход продукта E . E - это отношение количества исходного вещества, превращенного в данный продукт, к первоначальному количеству исходного вещества (10):

$$\nu_a A < \begin{matrix} \rightarrow \nu_R R \\ \rightarrow \nu_S S \end{matrix}$$

$$E = \frac{\text{количество вещества A превратившегося в R}}{\text{начальное количество вещества A}} = \frac{N_{A \rightarrow R}}{N_{A_0}} \quad (10)$$

Интегральная селективность процесса (S) по продукту – это отношение количества исходного вещества, превращенного в конечный продукт, ко всему количеству превращенного реагента. Для реакции (11):

$$S_R = \frac{N_{A \rightarrow R}}{\Delta N_A} \quad (11)$$

количественная связь между S , E , X равна (12):

$$E = S_R \cdot X_A \quad (12)$$

Дифференциальная селективность (S') – это отношение скорости превращения исходного вещества A в продукт R ($W_{A \rightarrow R}$) к общей скорости превращения A (W_A) (13):

$$S'_R = \frac{W_{A \rightarrow R}}{W_R} \quad (13)$$

От значения селективности реакции будет зависеть необходимое количество исходного материала, которое потребуется на образование целевого продукта. Таким образом встает задача по поиску максимального значения селективности для образования наибольшего количества целевого продукта с наименьшими затратами исходного продукта.

Исходные данные к решению поставленной задачи

Скорость каждой реакции (r_i), описывается уравнениями (14) - (17), соответственно:

$$r_1 = \frac{k_1 \cdot b_Y \cdot C_Y \cdot C_A}{1 + b_Y \cdot C_Y + b_B \cdot C_B} \quad (14)$$

$$r_2 = \frac{k_2 \cdot b_B \cdot C_B \cdot C_F}{1 + b_B \cdot C_B} \quad (15)$$

$$r_3 = \frac{k_3 \cdot b_B \cdot C_B \cdot C_D}{1 + b_B \cdot C_B} \quad (16)$$

$$r_4 = \frac{k_4 \cdot b_b \cdot C_B \cdot C_D}{1 + b_B \cdot C_Y} \quad (17)$$

Параметр C_i – концентрация компонента i , ($i = A, Y, B, F, D$). Параметры $k_1, k_2, k_3, k_4, b_Y, b_B$ – неизвестны и должны быть рассчитаны из условия обеспечения минимального отклонения расчетных данных от экспериментальных. Причем данные параметры являются функцией температуры (T), описанной уравнениями (18) - (20):

$$k_i = k_i^0 \cdot \exp\left(-\frac{E_i}{8.314 \cdot (t + 273)}\right) \quad (18)$$

$$b_Y = b_Y^0 \cdot \exp\left(\frac{Q_Y}{8.314 \cdot (t + 273)}\right) \quad (19)$$

$$b_B = b_B^0 \cdot \exp\left(\frac{Q_b}{8.314 \cdot (t + 273)}\right) \quad (20)$$

где, k_i^0, E_i ($i = 1, 2, 3, 4$), b_Y^0, b_B^0, Q_Y, Q_b – константы.

Таблица 1

Значение констант

| Параметр | Единицы измерения | Значение |
|----------|---------------------------------|-------------------------------|
| k_1^0 | $\frac{\text{л}}{\text{сг}}$ | $(11,06 \pm 0,51) \cdot 10^3$ |
| k_2^0 | $\frac{\text{л}}{\text{сг}}$ | $(1,12 \pm 0,06) \cdot 10^3$ |
| k_3^0 | $\frac{\text{л}}{\text{сг}}$ | $(6,71 \pm 0,35) \cdot 10^3$ |
| k_4^0 | $\frac{\text{л}}{\text{сг}}$ | $(12,93 \pm 0,58)$ |
| E_1 | $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ | $(55,0 \pm 1,8) \cdot 10^3$ |
| E_2 | $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ | $(66,0 \pm 4,5) \cdot 10^3$ |
| E_3 | $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ | $(70,6 \pm 3,0) \cdot 10^3$ |
| E_4 | $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ | $(50,0 \pm 2,6) \cdot 10^3$ |

| | | |
|---------|---------------------------------|---------------------------------|
| b_Y^0 | $\frac{\text{л}}{\text{моль}}$ | $(3,06 \pm 0,15) \cdot 10^{-4}$ |
| b_B^0 | $\frac{\text{л}}{\text{моль}}$ | $(4,59 \pm 0,15) \cdot 10^{-4}$ |
| Q_Y | $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ | $(19,4 \pm 0,9) \cdot 10^3$ |
| Q_B | $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ | $(18,0 \pm 0,7) \cdot 10^3$ |

Для описания материального баланса в синтезе эпихлоргидрина, используется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{d\tau} = -r_1 \\ \frac{dC_Y}{d\tau} = -r_1 - 2 \cdot r_4 \\ \frac{dC_D}{d\tau} = r_1 - r_3 + 2 \cdot r_4 \\ \frac{dC_F}{d\tau} = -r_2 \\ \frac{dC_B}{d\tau} = r_1 - r_2 - r_3 \\ \frac{dC_E}{d\tau} = r_2 \\ \frac{dC_G}{d\tau} = r_3 \\ \frac{dC_K}{d\tau} = r_4 \end{cases}$$

Текущие значения концентраций определяются по интегральным уравнениям:

$$\begin{cases} C_Y = C_Y^0(1 - X) \\ C_A = C_Y^0(\beta - X) \\ C_B = C_B^0 + C_Y^0 \cdot X - C_G - C_E - 2 \cdot C_K \\ C_G = C_G^0 + C_Y^0 \cdot X \cdot \Phi_G^Y \\ C_E = C_E^0 + C_Y^0 \cdot X \cdot \Phi_E^Y \\ C_F = C_F^0 + C_Y^0 \cdot X \cdot \Phi_F^Y \\ C_K = C_K^0 + C_Y^0 \cdot X \cdot \Phi_K^Y \\ C_D = C_D^0 + C_Y^0 \cdot X - C_G \\ \Phi_B^Y = \frac{1}{X} \cdot \int_0^X \varphi_B^Y dX = \frac{1}{X} \cdot \int_0^X \frac{r_1 - r_2 - r_3}{r_1 + r_4} dX \\ \Phi_G^Y = \frac{1}{X} \cdot \int_0^X \frac{r_3}{r_1 + r_4} dX \\ \Phi_E^Y = \frac{1}{X} \cdot \int_0^X \frac{r_2}{r_1 + r_4} dX \\ \Phi_K^Y = \frac{1}{X} \cdot \int_0^X \frac{r_4}{r_1 + r_4} dX \end{cases}$$

Должно выполняться условие:

$$\Phi_B^Y + \Phi_G^Y + \Phi_E^Y + \Phi_K^Y = 1, \text{ где}$$

$$\beta = \frac{C_A^0}{C_Y^0}, (0.5 \leq \beta \leq 6)$$

$$C_B^0 = C_G^0 = C_E^0 = C_K^0 = 0$$

$$0 \leq X \leq 1$$

$$30 \leq t \leq 60$$

$$1.37 \leq C_A^0 \leq 4.86$$

$$14.03 \leq C_F^0 \leq 24.16$$

$$C_D^0 = 1.86 \cdot C_Y^0$$

Решение системы уравнений материального баланса и функции максимальной интегральной селективности представлено ниже.

Дана система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{d\tau} &= -r_1 \\ \frac{dC_Y}{d\tau} &= -r_1 - 2 \cdot r_4 \\ \frac{dC_D}{d\tau} &= r_1 - r_3 + 2 \cdot r_4 \\ \frac{dC_F}{d\tau} &= -r_2 \\ \frac{dC_B}{d\tau} &= r_1 - r_2 - r_3 \\ \frac{dC_E}{d\tau} &= r_2 \\ \frac{dC_G}{d\tau} &= r_3 \\ \frac{dC_K}{d\tau} &= r_4 \end{aligned}$$

Перепишем ее в другом виде и получим:

$$\frac{dC_A}{dx} = - \frac{C_Y^0 r_1}{r_1 + 2r_4}$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_D}{dx} &= \frac{r_1 - r_3 + 2r_4}{r_1 + 2r_4} C_Y^0 \\ \frac{dC_F}{dx} &= - \frac{r_2}{r_1 + 2r_4} C_Y^0 \\ \frac{dC_B}{dx} &= - \frac{-r_1 + r_2 + r_3}{r_1 + 2r_4} C_Y^0 \\ \frac{dC_E}{dx} &= \frac{r_2}{r_1 + 2r_4} C_Y^0 \\ \frac{dC_G}{dx} &= \frac{r_3}{r_1 + 2r_4} C_Y^0 \\ \frac{dC_K}{dx} &= \frac{r_4}{r_1 + 2r_4} C_Y^0 \end{aligned}$$

Необходимо найти $\max(1 - \Phi_K^Y - \Phi_E^Y - \Phi_G^Y)$, где:

$$\begin{aligned} \Phi_G^Y &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{r_3}{r_1 + r_4} dx \\ \Phi_E^Y &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{r_2}{r_1 + r_4} dx \\ \Phi_K^Y &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{r_4}{r_1 + r_4} dx \end{aligned}$$

$$\Phi_G^Y + \Phi_E^Y + \Phi_K^Y = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{r_3 + r_2 + r_4}{r_1 + r_4} dx$$

Одна из основных проблем данной задачи заключается в сложности поиска решения системы дифференциальных уравнений материального баланса и в поиске функции максимальной интегральной селективности. В системе протекает четыре химических реакции, каждая из которых имеет свою скорость и описывается своими уравнениями.

Также стоит отметить трудность программной реализации. Программный код должен быть разработан с учетом того, что данная математическая модель зависит от многих факторов и переменных и ее вычисление требует немалых производственных мощностей.

Для программной реализации поставленных задач необходимо определиться с используемыми инструментами разработки. Выбор стоит между Matlab и Python. Произведем анализ этих двух технологий.

Недостатки Matlab:

– алгоритмы являются проприетарными, что означает невозможность увидеть исходный код встроенных алгоритмов в Matlab;

– Matlab - это коммерческая разработка, поэтому для его использования необходимо приобрести лицензию;

– медленный и перегруженный операторами, командами, функциями язык, основной целью

которого является улучшение визуального восприятия;

– невысокий спрос. Несмотря на большой интерес к Matlab практически во всех сферах, фактически и легально его используют лишь немногие;

– неизбежны трудности при разработке Standalone-приложения, которое не будет нуждаться в дополнительных программах и зависимостях для корректной работы.

Преимущества Matlab:

– Matlab поставляется вместе со средой разработки;

– язык легок для изучения, обладает простым и понятным синтаксисом;

– в поставляемом пакете уже вшиты функции для анализа данных, покрывающие большинство областей математики;

– встроенная реализация работы с графиками.

Недостатки Python:

– универсальность. В нашем случае это будет недостатком, т.к. для работы со сложными математическими вычислениями необходимо найти дополнительные пакеты расширений и произвести их анализ, чтобы найти самый подходящий для конкретной задачи пакет;

– отсутствие среды разработки.

Преимущества Python:

– бесплатный;

– легкий в освоении язык программирования;

– простой синтаксис;

– программные решения, написанные на языке Python, работают на большинстве операционных систем.

Подводя итоги, можно заключить, что использование языка Python является более целесообразным из-за простоты и бесплатности технологий, базирующихся на языке Python. В качестве среды разработки используется Visual Studio Code из-за встроенной поддержки большей части необходимой функциональности и бесплатности среды. Для решения поставленной задачи необходимо подобрать оптимальные значения параметров X, t, C_A^0, C_Y^0 . Программный код будет перебирать значения варьирующихся параметров, и для каждой комбинации будет высчитываться значение интеграла. В начале работы программы максимальным найденным

значением будем считать интеграл $X = 0, t = 30, C_A^0 = 1.37, C_Y^0 = 0.5$.

Если в ходе работы программы новое значение интеграла удовлетворяет условиям и является больше предыдущего найденного максимального интеграла, то предыдущее найденное значение удаляется и на его место записывается новое найденное значение.

Выводы

В данной статье в ходе поиска максимальной интегральной селективности эпихлоргидрина была изучена теоретическая модель процесса и произведен обзор используемых в промышленности способов синтеза эпихлоргидрина. Выведена система уравнений материального баланса и получена формула интегральной селективности эпихлоргидрина для дальнейшего использования в разрабатываемом программном продукте.

Проведен анализ современных программных средств для вычисления сложных математических систем и сделан вывод, что применение языка программирования Python с использованием библиотек NumPy и SciPy является самым оптимальным.

Список литературы

Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/513352> (дата обращения: 05.03.2023).

Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — 2-е изд. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001 — 344 с:

Нейн, Ю. И. Технологические расчеты в проектировании химических установок : учебное пособие / Ю.И. Нейн, Н.П. Бельская ; под общ. ред. М.Ф. Костериной ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2021. — 166 с. : ил.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 514.1; 514.113.5; 514.12/13; 514.172.45; 514.764.254

ХИРУРГИЯ УИЛЬЯМА ПОЛА ТЁРСТОНА В СКЛЕЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЗВЕЗДНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ В ТРЕХ И БОЛЕЕ ИЗМЕРЕНИЯХ

Абдыманов Усен

(Международный юридический институт (МЮИ), Москва, РФ)
ORCID: 0000-0002-5569-6266

SURGERY BY WILLIAM PAUL THURSTON IN THE GLUED SPACE OF STAR GEOMETRIC BODIES IN THREE OR MORE DIMENSIONS

Usen Abdymanapov

(International Law Institute (ILI), Moscow, Russian Federation)
ORCID: 0000-0002-5569-6266

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.105.1764

АННОТАЦИЯ

В этой статье склеивая с помощью собственного спаривания выпуклые (невыпуклые) звездоздальные многогранники вдоль их сторон мы построим евклидовы, сферические и гиперболические многообразия, и изложим новый способ позволяющий склейку фундаментальной области фундаментальной группы многообразий звездного геометрического тела основанная на структурных моделях метрической геометрии и метрической топологии, и получим разбиение звездного геометрического тела, обладающие симметрией произвольной симплициальной группы путем операции разрезания и переклеивания в трёх и более измерениях.

ABSTRACT

In this article, gluing convex (nonconvex) star-hedral polyhedra along their sides using proper pairing, we will construct Euclidean, spherical and hyperbolic manifolds, and present a new method for gluing the fundamental domain of the fundamental group of manifolds of a star geometric body based on structural models of metric geometry and metric topology, and we obtain a partition of a star geometric body with the symmetry of an arbitrary simplicial group by cutting and re-gluing in three or more dimensions.

Ключевые слова: Орбифолдовая структура, звездные геометрические тела, группа гомотетий, лифт, группа изометрий, фундаментальная область, фундаментальная группа, звездоздр.

Key words: Orbifolds of structure, a star geometric body, lift, fundamental field, fundamental group, group of isometry, group of homotheties.

Введение

В современной геометрии и топологии широко распространены такие специфические операции как, склеивания многообразий и обратная к ней операция разрезания многообразий, операция приклеивания и обратная к ней операция переклеивания многообразий, операция заплат и обратная к ней операция выколотых дыр многообразий, операция высверливания и обратная к ней операция заделывания пробоин многообразий и так далее, последующие операции соответствующих многообразий. В последствии, первые две из этих специфических операций получили название хирургии многообразий. Впервые «орбифолд» был рассмотрен Ичиром Сатаке, который назвал его V - многообразием (см.[20]). Термин «орбифолд» был введен Уильямом Полом Тёрстоном и используется для описания фактор - многообразия по действию группы, которая не обязана действовать свободно (см.[23-25]). Исторически орбифолды возникли, как поверхности с особыми точками задолго до того, как они были формально определены. Грубо говоря, орбифолд можно было бы рассмотреть, как топологическое пространство, которое локально

является конечным групповым фактором евклидова пространства. Без свободного действия дискретной группы G создается конечное множество точек в факторизации многообразия M по допустимой дискретной группе G , то есть M/G , которые остаются неподвижными. Следовательно, смело можно утверждать, что множество особенностей превращает многообразие в «орбифолд». Ичиро Сатаке и Уильям Пол Тёрстон независимо друг от друга определяли «орбифолд» как фактор многообразия по действию группы. Позже Андре Хафлигер дал более общее определение через группоиды, которое является стандартным современным определением. Таким образом, «орбифолд» - это многообразие с особенностями, которое выглядит как фактор евклидова пространства по конечной группе вращений. «Орбифолд» также определяется как хаусдорфово топологическое пространство X и выделенный набор открытых отображений, которое представляется виде: $\psi_\alpha: (U_\alpha \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow X$, такое, что атласная карта $\psi_\alpha(U_\alpha)$ является покрытием хаусдорфово топологического пространства X . В отличие от многообразия, карты ψ_α не являются гомеоморфизмами, но для каждой

карты ψ_α имеется конечная группа Γ_α действующая поворотами на R^n и переводящая U в себя. Также заметим, что «орбиформ» можно создать из любого многообразия, допускающего дискретные симметрии, например, склеиванием точек некоторой орбиты действие дискретной группы G . Также отметим, что структура орбиформа кодирует не только структуру базового фактор-пространства,

которое не обязательно должно быть многообразием, но также структуру подгрупп изотропии. В отличие от квантовой теории поля, где «орбиформы» не особо приемлемы из-за сингулярностей, то в теории струн они находят более, широкое применение для компактификации высших измерений струнных переменных (см.[21-22]). Возникают новые современные

Проблемы:

• В склеенном пространстве звездных геометрических тел, можно ли создать аналогичный орбиформ из евклидового, сферического и гиперболического многообразия?

• Являются ли набор атласных карт покрытий в склеенном пространстве звездных геометрических тел, гомеоморфизмами?

• Для каждой набора атласных карт покрытий в склеенном пространстве звездных геометрических тел, имеется ли конечная группа действующая поворотами и переводящая набор открытых отображений в себя?

• Орбиформ склеенного пространства звездных геометрических тел определяются ли, как хаусдорфово топологическое пространство?

Эти четыре проблемы определяют цель данной обзорной статьи. Проведенное исследование показывает, что ответ утвердительный. Основные идеи и положения статьи содержатся в докладах и в работах автора (см.[1-19]).

Актуальность, теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая и практическая ценность работы состоит в том, что в ней полученные новые результаты вносят определенный вклад в геометрию неевклидовых многообразий, кривых и поверхностей. А также в геометрию дискретных групп и геометрической теории тяготений.

Обозначения и основные понятия.

Обозначения.

Если иное не предусмотрено, то на протяжении всей этой работы будет обозначать

- $\mathfrak{M}(m \geq 3)$ - звездное геометрическое тело;
- \mathfrak{N} - склеенное пространство звездных геометрических тел $\mathfrak{M}(m \geq 3)$;
- \mathfrak{N} - семейство выпуклых и невыпуклых звездоэдральных многогранников $\mathfrak{N}_i \in \mathfrak{N}$;
- \mathfrak{N}_i - выпуклые и невыпуклые звездоэдральные многогранники в \mathfrak{N} ;
- \wp - звездоэдр;
- \wp_Ω^* - семейство звездоэдров евклидовы, сферические и гиперболические многообразия;
- \wp_Σ^* - множество непересекающихся звездоэдров $(\bigcap_{i=1}^m \wp_i^m) = \emptyset$;
- $E^m, S^m, H^m (m \geq 3)$ - евклидовы, сферические и гиперболические многообразия;
- $\tilde{E}^m, \tilde{S}^m, \tilde{H}^m (m \geq 3)$ - склеенные евклидовы, сферические и гиперболические многообразия;
- G - группа изометрий $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m) (m \geq 3)$ -многообразия;
- (*) $(\Omega^m, G), (m \geq 3)$ - орбиформовая структура $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m) (m \geq 3)$ -многообразия;
- (*) $\tilde{\sigma}$ - геометрический криволинейный симплекс;
- G^* - группа гомотетий $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m) (m \geq 3)$ -многообразия;
- $star_3(\sigma)$ - звезда симплекса σ по триангуляции \mathfrak{Z} ;
- (*) $cl.(star_3(\tilde{\sigma}))$ - замкнутая звезда геометрического криволинейного симплекса $\tilde{\sigma}$ по триангуляции \mathfrak{Z} ;

(*) $nbhd. (\xi, \varepsilon)$ - окрестность точки ξ с радиусом ε ;

(*) $Ball^3(\xi, \varepsilon)$ - открытый трёхмерный шар с центром в точке ξ и с радиусом ε ;

• $cl.(Ball^3(\xi, \varepsilon))$ - замкнутый трёхмерный шар с центром в точке ξ и с радиусом ε .

Основные понятия.

Определение 1. Множество $\mathfrak{M}m(m \geq 3)$ называется звездным геометрическим телом, если оно

(I):

- звездное;
- не обязана быть центрально-симметричным;
- область его звездчатости имеет комбинаторный и звездный 0 - элемент;
- как топологический шар $\tilde{B}^m(m \geq 3)$ (или как топологический куб $\tilde{T}^m(m \geq 3)$), имеющий звездную триангуляцию \mathfrak{Z} , является m - элементом;

• представляется в виде связной суммы и разрезанными несжимаемыми шарами и двусторонними торами, каждая долька $int.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3))$ несет полную локально однородную метрику конечного объема.

(II):

• обладает свойством лучистости, то есть если точка $\xi \in int.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3))$, то луч $ray(\xi) = \max\{v \geq 0 | v\xi \in \mathbf{M}m(m \geq 3)\}$;

• если $int.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3)) \neq \emptyset$, то существует точка $\exists! \gamma = \forall ray(\xi) \cap bd. \mathbf{cl.M}m(m \geq 3)$;

• замкнутая звезда $cl.(star_{ball(\xi, \varepsilon)}(\sigma^m) = bd. star_{ball(\xi, \varepsilon)}(\sigma_i^m) = star(sphere)^{m-1}$;

• функция $ray(\mathbf{M}m(m \geq 3), \eta) = \text{supp.}\{\mu \geq 0 | \mu\eta \in \mathbf{M}m(m \geq 3)\}$ такова, что $ray(\mathbf{M}m(m \geq 3), \eta): star(sphere)^{m-1} \rightarrow \mathbf{N}$;

• луч $\forall ray(\xi \& \eta)$ пересекает поверхность $sf.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3))$ только один раз, либо

$L[sf.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3))] = ray(\xi) \cap sf.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3)) \cup ray(\eta) \cap sf.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3)) = \exists! \gamma_\xi \setminus \forall ray(\xi \& \eta)$

либо

$L[sf.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3))] = ray(\xi) \cap sf.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3)) \cup ray(\eta) \cap sf.(\mathbf{cl.M}m(m \geq 3)) = \exists! \gamma_\eta \setminus \forall ray(\xi \& \eta)$.

Определение 2. ($m \geq 3$) - мерным звездоэдром $\wp^m \in \wp_\Omega^*$ из семейства звездоэдров \wp_Ω^* называется точечное множество, расположенное в склеенном пространстве $\tilde{\wp}^m$, составленное из счётного количество непересекающихся геометрических криволинейных симплексов $|\tilde{\sigma}^v|$, ($0 \leq v \leq m$) по крайней мере один из которых равен $|\tilde{\sigma}^m|$, причем гребень

(i):

$ridge(R) = \{(ray(\xi) \cap \mathbf{M}m(m \geq 3)) | \xi \in sphere(\eta, 1), \delta(\xi) < \infty\}$ с условием $ridge(R) = bd. \mathbf{M}m(m \geq 3)$, если $\mathbf{M}m$ при ($m \geq 3$) - выпукло;

(ii):

$ridge(R) = \{(ray(\xi) \cap \mathbf{M}m(m \geq 3)) | \xi \in sphere(\eta^*, 1), \delta(\xi) < \infty\}$ с условием $ridge(R) = bd. \mathbf{M}m(m \geq 3)$, если $\mathbf{M}m$ при ($m \geq 3$) - не выпукло.

Определение 3. Непересекающимся множеством звездоэдров $(\bigcap_{i=1}^m \wp_i^m) = \emptyset$

называется множество \wp_Σ^* , для которого равносильны следующие условия:

• отображения $\theta(\wp^m): \Omega^m \rightarrow \Omega_{\wp^m}^m$ является гомотетией для каждого звездоэдра $\forall \wp^m \in \wp_\Omega^*$;

• звездоэдр $\wp^m \in \wp_\Omega^*$ является m - мерным звездоэдром в $\Omega_{\wp^m}^m$;

• звездоэдры $(\wp_i^m, \wp_j^m) \in \wp_\Omega^*$ взаимно не пересекаются.

Определение 4. Звездным боковым (сторонним) спариванием называется множество \wp_Σ^* , для которого равносильны следующие условия:

• для звездоэдра $\tilde{\wp}^m \in \wp_\Omega^*$ отображения $\theta(\tilde{\wp}^m): \Omega_{\tilde{\wp}^m}^m \rightarrow \Omega_{\wp^m}^m$ является гомотетией;

• для группы гомотетий $G_{\theta(\wp^m)} \in \Omega^m$ справедливо равенство

$$hom \ o \ thety(H_{(bd. \wp^m)}) = \theta^{-1}(\wp^m) \cdot \omega(bd. \wp^m) \cdot \theta(\tilde{\wp}^m);$$

• для $bd.(\tilde{\wp}^m) \in \tilde{\wp}^m$ также справедливо равенство

$$\omega(bd. \tilde{\wp}^m) = bd. \wp^m;$$

• гомотетии $\omega(bd. \wp^m)$ и $\tilde{\omega}(bd. \tilde{\wp}^m)$ таковы, что

$$\tilde{\omega}(bd. \tilde{\wp}^m) = \omega^{-1}(bd. \wp^m);$$

• пересечение звездоэдров \wp^m и $\omega(\tilde{\wp}^m)$ не пусто, то есть

$$\wp^m \cap \omega(\tilde{\wp}^m) = bd. \wp^m.$$

Определение 5. Звездное боковое (стороннее) спаривание множества \wp_Σ^* с множеством \wp_Σ называется собственным, если всякий цикл множества \wp_Σ^* представляется конечными и имеет место неравенство

$$\beta[\xi] = \sum_{i=1}^m \beta_i \ll \pi.$$

Так как $\xi \in int. \wp^m$ и β - телесный угол, стягиваемый к точке $\xi \in \wp^m$, то

$$\beta \ll \pi \left(\frac{vol.(\wp^m \cap ball^m(\xi, \varepsilon))}{vol. ball^m(\xi, \varepsilon)} \right), (m \geq 3), \text{ где } \varepsilon < |\xi - int(side(bd. \wp^m))|.$$

Определение 6. Звездное боковое (стороннее) спаривание множества \wp_Σ^* с множеством \wp_Σ называется звездно - собственным, если всякий цикл множества \wp_Σ^* представляется

- конечными;

• для всякого двугранного гребенчатого цикла множества $int.r\ idge(\wp_\Sigma^*)$ справедливо неравенство из

определение 5;

• всякий циклический гребень множества \wp_Σ^* представим в виде

$$cyclic(int.r\ idge(\wp_\Sigma^*[\xi]) = \alpha[\xi] = \sum_{i=1}^m \alpha_i \ll \pi,$$

где $\alpha \in \wp^m$ - двугранный угол вдоль гребня множества \wp_Σ^* звездного геометрического тела \mathbf{Mm} при ($m \geq 3$), содержащий точку $\xi \in \wp^m$.

Определение 7. Звездоэдральный m - элемент называется звездным, если

$$bd.star_\Sigma(\sigma_i) = star(sphere)^{m-1} \text{ или } bd.star_\Sigma(\sigma_i) = star_\Sigma(\sigma)^m.$$

Определение 8. m - мерное звездоэдральное многообразие с краем или без края называется звездным, если имеет место одно из двух следующих равенств

$$\wp^m(bd.star_\Sigma(\sigma_i)) = \wp^m(star(sphere)^{m-1}) \text{ или } \wp^m(star_\Sigma(\sigma_i)) = \wp^m(star_\Sigma(\sigma)^m).$$

Сформулируем основные результаты настоящей статьи:

Теорема 1. Если G - группа изометрий (гомотетий) многообразия $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m)$, ($m \geq 3$) и \mathbf{G} - собственное G - боковое (стороннее) спаривание конечного семейства \mathbf{N} - непересекающихся выпуклых и невыпуклых звездоэдральных многогранников в \mathbf{G} , то

• изометрии (гомотетии) совокупности θ - всех сторон выпуклых и невыпуклых звездоэдральных многогранников \mathbf{N} , не фиксирует точки из стороны $\theta^* \in \theta$ для каждого $\forall \theta$ в θ ;

• стороны θ и θ^* - выпуклых и невыпуклых звездоэдральных многогранников \mathbf{N} равны между собой тогда и только тогда, когда совокупность всех его сторон θ представляется большой двумерной сферой и изометрия (гомотетия) $isometry(I): \theta \rightarrow S^3$ является антиподальным отображением;

• каждый реберный цикл выпуклого и невыпуклого звездоэдрального многогранника \mathbf{N} в многообразии $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m)$, ($m \geq 3$) содержит не более одной точки в ребрах выпуклого и невыпуклого звездоэдрального многогранника \mathbf{N} из \mathbf{S} .

Теорема 2. Пусть G - группа изометрий (гомотетий) многообразия $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m)$, ($m \geq 3$), и пусть \mathbf{S} - пространство полученное склейкой конечного семейства \mathbf{N} - непересекающихся выпуклых и невыпуклых звездоэдральных многогранников в многообразии $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m)$, ($m \geq 3$) с помощью собственного G - бокового (стороннего) спаривания \mathbf{G} . Тогда \mathbf{S} является трехмерным многообразием с $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - орбиформальной структурой многообразия $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m)$, ($m \geq 3$) таких, что естественная инъекция $injection(I): \mathbf{M}^m \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{N})$, ($m \geq 3$) является $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - орбиформальным отображением для звездного геометрического тела \mathbf{Mm} , ($m \geq 3$) в \mathbf{N} .

Теорема 3. Пусть G - группа сохраняющих ориентацию изометрий (гомотетий) многообразия $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m)$, ($m \geq 3$), и пусть \mathbf{G} - G - боковое (стороннее) спаривание конечного семейства \mathbf{N} - непересекающихся выпуклых и невыпуклых звездоэдральных многогранников в $\Omega^m = (E^m, S^m, H^m)$, ($m \geq 3$) - многообразии. Тогда \mathbf{G} является правильным тогда и только тогда, когда

• каждый цикл \mathbf{G} - конечен;

• изометрии (гомотетии) совокупности θ - всех сторон выпуклых и невыпуклых звездоэдральных многогранников \mathbf{N} , не фиксирует точки из стороны $\theta^* \in \theta$ для каждого $\forall \theta$ в θ ;

• каждый краевой цикл \mathbf{G} имеет двугранную сумму телесных углов равной $360^\circ(2\pi)$.

Замечание 1. Собственное G - боковое (стороннее) спаривание \mathbf{G} для \mathbf{N} является правильным тогда и только тогда, когда каждый цикл \mathbf{N} конечен и имеет сумму телесных углов равной $720^\circ(4\pi)$.

Замечание 2. Подпространство $\Sigma \subseteq \mathbf{S}$, пространства \mathbf{S} в \mathbf{N} полученное склейкой многоугольников имеет сферическую структуру и является $sphere^2(x, \varepsilon)$ - сферой, так как она является компактным, связным и реберный цикл $\omega[x] = 720^\circ(4\pi)$.

Замечание 3. Если $Ball^3(\xi, \varepsilon)$ - конформный модель шара, то боковое (стороннее) спаривание \mathbf{G} со сторонами θ многогранников в \mathbf{N} продолжается до спаривания идеальных вершин многогранников в \mathbf{N} , что, в свою очередь, порождает отношение эквивалентности на множестве всех идеальных вершин многогранников в \mathbf{N} .

Так как теорема 2 дополняет теорему 1, а теорема 3 упрощает теорему 2, то доказательство теоремы 2 изложим в двух вариантах:

I. Доказательство теоремы 2 для любого выпуклого и невыпуклого звездоэдрального многогранника $\forall \mathbf{N}$ в \mathbf{N} . Без ограничения общности будем считать, что любой выпуклый и невыпуклый звездоэдральный многогранник в \mathbf{G} имеет хотя бы одну сторону θ . Предположим, что $x \in \mathcal{E}$ - точка порожаемое отношением эквивалентности множество $\mathcal{E} = \cup_{\mathbf{N}} \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \in \mathbf{S}$ и $[x] = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ - конечный цикл \mathbf{G} . И, пусть \mathbf{N}_i - многогранник в \mathbf{N} , содержащий x_i , для любого i . Тогда при $m \geq 2$, точка x_i будет находится в стороне от многогранника $\mathbf{N}_i \in \mathbf{N}$. Пусть $\delta(x) = \min_{(i \neq j)}(x_i, x_j)$ и $\delta(x) = \min_{(i)}(x_i, \forall \theta \in \mathbf{N}_i)$, не содержащей x_i для любого $\forall i$. Также пусть имеет место $(0 < \varepsilon \in \{R\} < \frac{\delta(x)}{2})$. Тогда для любого $\forall i$, множество $(\mathbf{N}_i \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))$ представляет собой многоугольник в сфере $sphere^2(x_i, \varepsilon)$, и многоугольники $(\mathbf{N}_i \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))$ не пересекаются. Следовательно, боковая пара \mathbf{G} ограничивается правильным $\mathbf{E}(\theta^2)$ - боковым парным соединением многоугольников $(\mathbf{N}_i \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))$. Пусть $\mathbf{W}(x, \varepsilon)$ - пространство полученное склейкой многоугольников $(\mathbf{N}_i \cap sphere^2(x_i, \varepsilon)) = \emptyset$ и допускает

орбифолдово - сферическую структуру; более того $\mathbf{W}(x, \varepsilon)$ является $sphere^2(x, \varepsilon)$ - сферой, поскольку пространство склеенных многоугольников $\mathbf{W}(x, \varepsilon)$ - компактно, связно и реберный цикл $\omega[x] = 720^\circ(4\pi)$. Далее, пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{N})$ - фактор отображение. Тогда ограничение $\pi|_{(\aleph_i \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))}$ для любого $\forall i$ продолжается до изометрии $isometry(\xi_i): sphere^2(x_i, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{W}(x, \varepsilon)$; более того, для любого $\forall(i, j)$ изометрия $isometry(\xi_j^{-1} \cdot \xi_i): sphere^2(x_i, \varepsilon) \rightarrow sphere^2(x_j, \varepsilon)$ продолжается до идеальной (особой) изометрии $isometry(\theta_{i,j}) \in \Omega^m(m \geq 3)$ и изометрия $isometry(\theta_{i,j}(x_i)) = x_j$. Предположим, что элемент $\theta_\theta \in \mathbf{G}$ связывает сторону $(\theta^* \cap sphere^2(x_i, \varepsilon)) \in (\aleph_i \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))$ со стороной многоугольника сферы $(\theta \cap sphere^2(x_j, \varepsilon)) \in (\aleph_j \cap sphere^2(x_j, \varepsilon))$. Тогда изометрия $isometry(\xi_j^{-1} \cdot \xi_i)$ согласуется с элементом $\theta_\theta \in \mathbf{G}$ на множестве $(\theta^* \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))$. Следовательно изометрия $isometry(\xi_j^{-1} \cdot \xi_i)$ совпадает с элементом $\theta_\theta \in \mathbf{G}$ на большом круге $circle(\theta^* \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))$. И, так изометрии $isometry(\theta_{i,j}) \in \Omega^m(m \geq 3)$ совпадают с элементом $\theta_\theta \in \mathbf{G}$ на плоскости $plane(\theta^*)$. Так как изометрии $isometry(\theta_{i,j}) \in \Omega^m(m \geq 3)$ и элемент $\theta_\theta \in \mathbf{G}$ - оба отображают многоугольника $(\aleph_i \cap sphere^2(x_i, \varepsilon))$ на противоположную сторону плоскости $plane(\theta) \in (\aleph_j \cap sphere^2(x_j, \varepsilon))$, то отсюда вытекает, что $isometry(\theta_{i,j}) = \theta_\theta \in \mathbf{G}$. Далее предположим, что реберный цикл $[x] = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\}$ имеет упорядочение

$$x_i = x_{i_1} \cong x_{i_2} \cong \dots \cong x_{i_p} = x_j \quad (1)$$

Тогда имеем, что (2):

$$isometry(\xi_j^{-1} \cdot \xi_i) = isometry(\xi_{i_p}^{-1} \cdot \xi_{i_{p-1}}) \cdot isometry(\xi_{i_{p-1}}^{-1} \cdot \xi_{i_{p-2}}) \cdot \dots \cdot isometry(\xi_{i_2}^{-1} \cdot \xi_{i_1})$$

Следовательно

$$isometry(\theta_{i,j}) = isometry(\theta_{i_{p-1}i_{p-1}}) \cdot isometry(\theta_{i_{p-1}i_{p-2}}) \cdot \dots \cdot isometry(\theta_{i_1i_2}) \quad (3)$$

Таким образом элементы (3) в обратном порядке находятся в \mathbf{G} по предыдущему аргументу. Отсюда изометрии $isometry(\theta_{i,j}) \in \Omega^m(m \geq 3)$ находится в группе G - изометрий для любого $\forall(i, j)$. Определим открытый множество

$$U(x, \varepsilon) = \cup_{i=1}^m \pi(\aleph_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon)) \quad (4)$$

Поскольку набор

$$\pi^{-1}(U(x, \varepsilon)) = \cup_{i=1}^m (\aleph_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon)) \quad (5)$$

- открыт в $\mathcal{E} = \cup_{\aleph} \aleph, \aleph \in \mathbf{S}$, то $U(x, \varepsilon)$ является открытым подмножеством \mathbf{S} . Пусть $x = x_k$, и по правилу $\tau_x(z) = isometry(\theta_{i,k}(z))$ пусть функция τ_x представляется в виде

$$\tau_x: \cup_{i=1}^m (\aleph_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon)) \rightarrow ball^3(x, \varepsilon), \quad (6)$$

если $z \in (\aleph_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$. И, пусть $isometry(\theta_\theta(x_i)) = x_j$. Тогда имеем, что

$$isometry(\theta_\theta) = isometry(\theta_{i,j}) \quad (7)$$

Теперь пусть точка $y \in (\theta \cap ball^3(x_j, \varepsilon))$ и, пусть $y^* = isometry(\theta_\theta^{-1}(y))$. Тогда точка $y^* \in (\theta^* \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$. Из равенство изометрий

$$isometry(\xi_k^{-1} \cdot \xi_i) = isometry(\xi_k^{-1} \cdot \xi_j) \cdot isometry(\xi_j^{-1} \cdot \xi_i) \quad (8)$$

имеем, что

$$isometry(\theta_{i,k}) = isometry(\theta_{j,k}) \cdot isometry(\theta_{i,j}) \quad (9)$$

Следовательно, (10):

$$\tau_x(y) = isometry(\theta_{j,k}(y)) = isometry(\theta_{j,k}) \cdot isometry(\theta_\theta(y^*)) = isometry(\theta_{i,k}(y^*)) = \tau_x(y^*)$$

Таким образом функция τ_x , индуцирует непрерывную функцию

$$\tau_x: U(x, \varepsilon) \rightarrow ball^3(x, \varepsilon) \quad (11)$$

Для любого $\forall \nu(0 < \nu < \varepsilon)$, функция τ_x ограничивается изометрией

$$isometry(\xi_k^{-1}): \mathbf{W}(x, v) \rightarrow \Theta(x, v) \quad (12)$$

Следовательно, функция τ_x является биекцией с непрерывным обратным, определяемым как

$$\tau_x^{-1}(z) = \pi \cdot isometry(\theta_{i,k}^{-1}(z)), \quad (13)$$

если $z \in isometry(\theta_{i,k}(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon)))$. Из выше сказанного делаем выводы, что функция τ_x является гомеоморфизмом и пространство \mathbf{S} - хаусдорфова. То же рассуждение касается на то, что пространство \mathbf{S} - трехмерное многообразие.

Далее мы покажем, что

$$\{\tau_x: U(x, \varepsilon) \rightarrow ball^3(x, \varepsilon) | x \in \Xi = \cup_{\mathfrak{N}} \mathfrak{N}, \varepsilon \in \frac{\delta(x)}{3}\} \quad (14)$$

является $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - атласом для пространства \mathbf{S} . По построению $U(x, \varepsilon)$ - открытое, связное подмножество пространства \mathbf{S} , то есть $U(x, \varepsilon) \subset \mathbf{S}$, функция τ_x - гомеоморфизм. Кроме того $U(x, \varepsilon)$ определено для любой точки $\pi(x) \in \mathbf{S}$ и достаточно малого радиуса ε . Следовательно $\{U(x, \varepsilon)\}$ является открытым покрытием пространства \mathbf{S} . Предположим, что открытые подмножества $U(x, \varepsilon)$ и $U(y, \varepsilon_1)$ соответственно с условиями $(\varepsilon < \frac{\delta(x)}{3})$ и $(\varepsilon_1 < \frac{\delta(y)}{3})$ перекрываются. И, пусть $\mathbf{T}(x) \in \mathbf{S}$ - грань многогранника \mathbf{N} в \mathbf{S} , содержащая точку x внутри. Поменяв местами точек x и y , если это так необходимо, мы можем представить

$$dim. \mathbf{T}(x) \geq dim. \mathbf{T}(y) \quad (15)$$

Затем, как и выше имеем

$$\pi^{-1}(U(x, \varepsilon)) = \cup_{i=1}^m (\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon)), \quad (16)$$

$$\pi^{-1}(U(y, \varepsilon_1)) = \cup_{j=1}^n (\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1)) \quad (17)$$

Далее, пусть для некоторых значений i и j , множество $(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$ соответствует множеству $(\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1))$. Путем переиндексации также положим, что $(\mathfrak{N}_1 \cap ball^3(x_1, \varepsilon))$ соответствует $(\mathfrak{N}_1^* \cap ball^3(y_1, \varepsilon_1))$. Тогда $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1^*$ и $dist.(x_1, y_1) < \varepsilon + \varepsilon_1$. Предположим, что точка y_1 находится на каждой стороне \mathfrak{N}_1 которая содержит точку x_1 . Напротив, предположим, что точка y_1 не находится в стороне от \mathfrak{N}_1 , который содержит точку x_1 и $(\varepsilon_1 < \frac{dist.(x_1, y_1)}{3})$. Тогда точка x_1 находится на каждой стороне \mathfrak{N}_1 , содержащий точку y_1 , иначе получили бы противоречие, что $(\varepsilon < \frac{dist.(x_1, y_1)}{3})$. Следовательно, грань $\mathbf{T}(x_1)$ является собственной гранью $\mathbf{T}(y_1)$ и при этом точка y_1 находится в каждой стороне многогранника \mathfrak{N}_1 , что содержит точку x_1 . Отсюда вытекает, что для любого значения $\forall i$, множество $(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$ соответствует множеству $(\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1))$ для некоторого значения j . Положим, что множество $(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$ соответствует множеству $(\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1))$ только для одного значения j . Напротив, предположим, что множество $(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$ одновременно соответствует множествам $(\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1))$ и $(\mathfrak{N}_k^* \cap ball^3(y_k, \varepsilon_1))$. Тогда имеет место равенство: $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_j^* = \mathfrak{N}_k^*$. Поскольку точки y_j и y_k находятся на каждой стороне многогранника \mathfrak{N}_i содержащей точку x_i , то имеем, что грани $\mathbf{T}(y_j)$ и $\mathbf{T}(y_k)$ являются гранями $\mathbf{T}(x_i)$; более того, грани $\mathbf{T}(y_j)$ и

$\mathbf{T}(y_k)$ - различны. Отсюда следует, что грани $\mathbf{T}(y_j)$ и $\mathbf{T}(y_k)$ - собственные грани $\mathbf{T}(x_i)$ и имеем

$$\left(\varepsilon < \frac{dist.(x_i, y_j)}{3}\right), \left(\varepsilon < \frac{dist.(x_i, y_k)}{3}\right), \left(\varepsilon_1 < \frac{dist.(y_j, y_k)}{3}\right) \quad (18)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} dist.(x_i, y_j) + dist.(x_i, y_k) &< (\varepsilon + \varepsilon_1) + (\varepsilon + \varepsilon_1) = 2(\varepsilon + \varepsilon_1) \\ &< \frac{dist.(x_i, y_j)}{3} + \frac{dist.(x_i, y_k)}{3} + 2 \cdot \frac{dist.(y_j, y_k)}{3} \\ &\leq dist.(x_i, y_j) + dist.(x_i, y_k); \text{ противоречие. } \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, множество $(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$ соответствует множеству $(\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1))$ только для одного значения j . Допустим, что множество $(\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1))$ соответствует множеству $(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$ только для одного значения i . Напротив, предположим, что множество $\mathfrak{N}_j^* \cap ball^3(y_j, \varepsilon_1)$ соответствует одновременно множествам $(\mathfrak{N}_i \cap ball^3(x_i, \varepsilon))$ и $(\mathfrak{N}_k \cap ball^3(x_k, \varepsilon))$. Тогда имеет место

равенство: $\aleph_i = \aleph_j^* = \aleph_k$. Так как точка y_j находится на каждой стороне многогранника \aleph_i , содержащей точек x_i или x_k , имеем, что грань $\mathbf{T}(y_j)$ является гранью одновременно граней $\mathbf{T}(x_i)$ и $\mathbf{T}(x_k)$; более, того грани $\mathbf{T}(x_i)$ и $\mathbf{T}(x_k)$ - различны. Отсюда имеем, что

$$\varepsilon < \frac{\text{dist.}(x_i, y_j)}{3} < \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{3}, \quad (20)$$

где $(\varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2})$. Так как $(\varepsilon_1 < \frac{\delta(y)}{2})$, то $(\varepsilon < \frac{\delta(y)}{6})$. Но с другой стороны, мы также имеем, что

$$\text{dist.}(x_i, y_j) < (\varepsilon + \varepsilon_1) < \frac{\delta(y)}{2}, \quad (21)$$

$$\text{dist.}(x_k, y_j) < (\varepsilon + \varepsilon_1) < \frac{\delta(y)}{2} \quad (22)$$

Далее из построения $U(y, (\varepsilon + \varepsilon_1))$ выводим, что

$$\text{injection}(\pi): (\aleph_i \cap \text{ball}^3(y_j, (\varepsilon + \varepsilon_1))) \rightarrow \mathcal{S} \quad (23)$$

Поскольку точки x_i и x_k входят в множество $(\aleph_i \cap \text{ball}^3(y_j, (\varepsilon + \varepsilon_1)))$, то получим противоречие. Следовательно, мы можем переиндексировать $[y]$ так, чтобы множество $(\aleph_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon))$ соответствовала только множеству $(\aleph_i^* \cap \text{ball}^3(y_i, \varepsilon_1))$ для значение $(i = 1, 2, 3, \dots, m)$. Тогда для любого $\forall i$ имела бы места соотношение $(\aleph_i = \aleph_i^*)$. Допустим, что $(\text{isometry}(\theta_{i,j}), \text{isometry}(\eta_{i,j})) \in G$ - элементы, построенные, как и выше, для точек x и y . И, пусть $\text{isometry}(\theta_\theta)$ соединяет сторону элемента $(\theta^* \cap \text{sphere}^2(x_i, \varepsilon)) \subseteq (\aleph_i \cap \text{sphere}^2(x_i, \varepsilon))$ со стороной $(\theta \cap \text{sphere}^2(x_j, \varepsilon))$ элемента $(\aleph_j \cap \text{sphere}^2(x_j, \varepsilon))$, то есть $(\theta \cap \text{sphere}^2(x_j, \varepsilon)) \subseteq (\aleph_j \cap \text{sphere}^2(x_j, \varepsilon))$. Тогда имеем, что

$$\text{isometry}(\theta_\theta) = \text{isometry}(\theta_{i,j}), \quad (24)$$

$$\text{isometry}(\theta_\theta) = x_j \quad (25)$$

Отсюда точка $x_i \in \theta^*$. Так как множество $(\aleph_i \cap \text{ball}(x_i, \varepsilon)) \subseteq (\aleph_i \cap \text{ball}(y_i, \varepsilon_1))$, то точка $y_i \in \theta^*$. Заметим, что

$$\text{isometry}(\theta_\theta(\aleph_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon))) \subseteq \text{isometry}(\theta_\theta(\aleph_i \cap \text{ball}^3(y_i, \varepsilon_1))). \quad (26)$$

Таким образом

$$(\aleph_j \cap \text{ball}(x_j, \varepsilon)) \subseteq (\aleph_j \cap \text{ball}(\text{isometry}(\theta_\theta(y_i)), \varepsilon_1)) \quad (27)$$

Следовательно

$$\text{isometry}(\theta_\theta(y_i)) = y_j, \quad (28)$$

$$\text{isometry}(\theta_{i,j}) = \text{isometry}(\eta_{i,j}) \quad (29)$$

Теперь предположим, что

$$x_i = x_{i_1} \cong x_{i_2} \cong \dots \cong x_{i_p} = x_j, \quad (30)$$

$$y_i = y_{i_1} \cong y_{i_2} \cong \dots \cong y_{i_p} = y_j, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{isometry}(\theta_{i,j}) &= \text{isometry}(\theta_{i_{p-1}i_p}) \cdot \text{isometry}(\theta_{i_{p-2}i_{p-1}}) \cdot \dots \cdot \text{isometry}(\theta_{i_1i_2}) \\ &= \text{isometry}(\eta_{i_{p-1}i_p}) \cdot \text{isometry}(\eta_{i_{p-2}i_{p-1}}) \cdot \dots \cdot \text{isometry}(\eta_{i_1i_2}) = \text{isometry}(\eta_{i,j}) \quad (32) \end{aligned}$$

Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} U(x, \varepsilon) \cap U(y, \varepsilon_1) &= \pi(\cup_{i=1}^m \aleph_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon)) \cap \pi(\cup_{j=1}^n \aleph_j^* \cap \text{ball}^3(y_j, \varepsilon_1)) \\ &= \pi([\cup_{i=1}^m \aleph_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon)] \cap [\cup_{j=1}^n \aleph_j^* \cap \text{ball}^3(y_j, \varepsilon_1)]) \\ &= \pi(\cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n [\aleph_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon) \cap \aleph_j^* \cap \text{ball}^3(y_j, \varepsilon_1)]) \\ &= \pi(\cup_{i=1}^m \aleph_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon) \cap \text{ball}^3(y_i, \varepsilon_1)) \quad (33) \end{aligned}$$

Пусть точки $x = x_k$ и $y = y_l$. Тогда функции

$$\tau_x(U(x, \varepsilon) \cap U(y, \varepsilon_1)) = \bigcup_{i=1}^m \text{isometry}(\theta_{i,k}(\mathbb{R}_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon) \cap \text{ball}^3(y_i, \varepsilon_1))), \quad (34)$$

$$\tau_y(U(x, \varepsilon) \cap U(y, \varepsilon_1)) = \bigcup_{i=1}^m \text{isometry}(\eta_{i,l}(\mathbb{R}_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon) \cap \text{ball}^3(y_i, \varepsilon_1))) \quad (35)$$

Отсюда следует, что произведение гомеоморфных отображений $\tau_y \cdot \tau_x^{-1}$ является на множестве $\text{isometry}(\theta_{i,k}[\mathbb{R}_i \cap \text{ball}^3(x_i, \varepsilon) \cap \text{ball}^3(y_i, \varepsilon_1)])$ ограничением

$$\begin{aligned} \text{isometry}(\eta_{i,l}) \cdot \text{isometry}(\theta_{i,k}^{-1}) &= \text{isometry}(\eta_{i,l}) \cdot \text{isometry}(\eta_{i,k}^{-1}) \\ &= \text{isometry}(\eta_{i,l}) \cdot \text{isometry}(\eta_{k,i}) = \text{isometry}(\eta_{k,l}) \end{aligned} \quad (36)$$

для любого значения $(i = 1, 2, \dots, m)$ и согласуется с элементом группы G . Этим завершается доказательство нашей теоремы 2 для любого выпуклого и невыпуклого звездодрального многогранника $\forall \mathbb{R}$ в \mathbb{N} того, что функция $\{\tau_x\}$ является $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - атласом для пространства \mathbf{S} и, что $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - орбиформальная структура пространства \mathbf{S} обладает тем свойством, что естественное отображение инъекции в \mathbf{S} также является $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - картом для любого выпуклого и невыпуклого многогранника $\forall \mathbb{R}$ в \mathbf{S} .

II. Доказательство теоремы 2 для любого выпуклого и невыпуклого звездного геометрического тела $Mm(m \geq 3)$ в \mathbb{N} . Доказательству нашей теоремы 2 предположим следующее двум утверждениям:

Лемма1. Пусть G^* - группа гомететий звездного геометрического тела

$\forall Mm, (m \geq 3)$ в \mathbb{N} . И пусть \mathbf{N} - семейства непересекающихся выпуклых и невыпуклых звездодральных многогранников в многообразии $\Omega^m(m \geq 3)$. Тогда из установленного равенства между пространством \mathbf{S} и $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - орбиформальной структурой многообразии $\Omega^m(m \geq 3)$ вытекает, что

$$\text{injection}(I): ((\tilde{\varphi} \in \wp_{\Omega}^*) \subseteq Mm(m \geq 3)) \rightarrow \wp, \quad (37)$$

$$\text{injection}(I): ((\tilde{\varphi} \in \wp_{\Omega}^*) \subseteq Mm(m \geq 3)) \rightarrow (\Omega^m, G)(m \geq 3) \quad (38)$$

либо (37), либо (38) является $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - орбиформальным отображением.

Лемма2. Пусть G - группа изометрий звездного геометрического тела

$Mm(m \geq 3)$ в \mathbf{S} . Тогда равносильно одно из следующих равенств:

$$(\wp_{bd.star_3(\sigma_i)} \in \wp_{\Omega}^*) = (\wp_{star(sphere^2(x, \varepsilon))} \in \wp_{\Omega}^*), \quad (39)$$

$$(\wp_{bd.star_3(\sigma_i)} \in \wp_{\Omega}^*) = (\wp_{star_3(\sigma^3)} \in \wp_{\Omega}^*). \quad (40)$$

Сначала изложим схему доказательства леммы2, а затем леммы1.

Доказательство леммы2. Так как $cl. Mm(m \geq 3)$ - произвольное замкнутое звездное геометрическое тело и точка $\xi \in int. cl. Mm(m \geq 3)$, то любой луч $ray(\xi) \in int. cl. Mm(m \geq 3)$, исходящий из точки $\xi \in int. cl. Mm(m \geq 3)$, пересекает границу $bd. cl. Mm(m \geq 3)$ в единственной точке $\phi(\xi) = ray(\xi) \cap bd. cl. Mm(m \geq 3)$. Любое звездное геометрическое тело $\forall cl. Mm(m \geq 3)$ и его $M_i^m(m \geq 3)(i \geq 1)$ - расщепления при любом конфигурационном пересечении, всегда имеют выпуклую область звёздчатости. Положим, что

$$(2 - \text{элемент} \setminus \text{stardisk}(M2) \setminus M3) = cl. star_{ball^2(\xi, \varepsilon)}(\sigma^2) \setminus \text{stardisk}(M2) \setminus M3$$

$$= (\text{stardisk}(M_i^2) \cap bd. (M_i^3)) = \text{starcurve}(M_i^3) \Leftrightarrow$$

$$((3 - \text{элемент}) \cup_{\psi_i} bd. disk(M_i^2)) = cl. star_{ball^3(\xi, \varepsilon)}(\sigma^3) \cup_{\psi_i} bd. disk(M_i^2))$$

или

$$(2 - \text{элемент} \setminus \text{starcylinder}(M2) \setminus M3) = cl. star_{cub(\tau^2)}(\sigma^2) \setminus \text{starcylinder}(M2) \setminus M3$$

$$= (\text{starcylinder}(M_i^2) \cap bd. (M_i^3)) = \text{starcurve}(M_i^3) \Leftrightarrow$$

$$((3 - \text{элемент}) \cup_{\psi_i} bd. cylinder(M_i^2)) = (cl. star_{cub(\tau^3)}(\sigma^3) \cup_{\psi_i} bd. cylinder(M_i^2))$$

Очевидно, что оно допускает геометрическую структуру, то есть для любых двух его различных точек $(\xi, \eta) \in M3$ существует окрестности $nbhd(\xi)$ и $nbhd(\eta)$ соответственно точек $(\xi, \eta) \in M3$ такие, что

$$\text{isometry}(I): (nbhd(\xi), \xi) \rightarrow (nbhd(\eta), \eta) \quad (41)$$

Далее устанавливается $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - орбиформальная структура многообразии $\Omega^m(m \geq 3)$ для звездного геометрического тела $M3$ и доказывается, что отображение

$$\psi_{\xi}: nbhd(\xi, \varepsilon) \rightarrow starball^3(\xi, \varepsilon) \quad (42)$$

- гомеоморфизм и пространство \mathbf{S} - хаусдорфово. Доказательство **леммы2** завершается тем, что множество вида

$$\left\{ \psi_{\xi}: nbhd(\xi, \varepsilon) \rightarrow starball^3(\xi, \varepsilon) \mid \xi \in \wp_{\Sigma}^{**}, \varepsilon < \frac{\delta(\xi)}{5} \right\} \quad (43)$$

является $(\Omega^m, G)(m \geq 3)$ - атласом для пространства \mathbf{S} в звездном геометрическом теле **M3**.

Доказательство леммы1. Пусть для $\forall i, \xi_i \in \wp_i \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)$. Тогда

$\xi_i \in starside(\wp) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)$. И пусть $|\varepsilon| < \frac{1}{5}\sigma(\xi)$. Также положим, что

$$\sigma^*(\xi) = \min_{(\xi_i \neq \xi_j \neq \xi_k) \{dist.(\xi_i, \xi_j), dist.(\xi_k, \forall starside(\wp))\}} \mathbf{Mm}(m \geq 3) \quad (44)$$

Тогда для $\forall i$ имеем, что

$$dim\{(\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \in starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)\} = m - 1, \quad (45)$$

причем, $\{\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)\} = 0$ в $\mathbf{Mm}(m \geq 3)$. Пусть звездно собственное звездчатое спаривание (46):

$$isometry(starball^{m-1}(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \in \{(\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \in starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)\}$$

ограничено множеством $\wp_{\Sigma}^* \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)$, и пусть $\{(\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)) = 0\} \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)$. Тогда очевидно, что пространство \mathbf{S} допускает геометрическую и топологическую $(m - 1)$ - орбиолдovou структуру в звездных геометрических телах $\mathbf{Mm}(m \geq 3)$; более того, пространство \mathbf{S} - компактно, так как $[\xi]$ - ограниченный цикл. Следовательно, пространство \mathbf{S} - является полным звездно - шаровым орбиолдом звездного геометрического тела $\mathbf{Mm}(m \geq 3)$. К тому же, пространство \mathbf{S} - связно при $m > 1$, причем

$$\mathbf{S} = (m - ball^m(\xi, \varepsilon)(m \geq 3)) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) \quad (47)$$

Пусть $G_i^* \subseteq G^*$ - конечная подгруппа группы G^* . И пусть для $\forall i$ фиксированная точка ξ_i такая, что сужение фактор - отображения

$$\pi: (\wp_{\Sigma}^{**} \rightarrow \mathbf{S}) \rightarrow ((\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)) \quad (48)$$

расширяется изометрией

$$isometry(\sigma_i): starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3) \rightarrow \mathbf{S}, \quad (49)$$

причем, изометрия в (49) индуцирует изометрию

$$isometry(\sigma_i^*): (starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)/G_i^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) \rightarrow \wp_{\Sigma}^{**} \quad (50)$$

Более того, подгруппа $G_i^* \subseteq G^*$ не зависит от выбора ε в $\mathbf{Mm}(m \geq 3)$. Также пусть имеет место фактор - отображение

$$\pi: starball^m(\xi, \varepsilon)(m \geq 3) \rightarrow (starball^m(\xi, \varepsilon)/G_i^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) \quad (51)$$

Тогда изометрия

$$isometry(\sigma_i) = \pi \cdot isometry(\tilde{\sigma}_i) \quad (52)$$

Ясно, что для любого $\forall i$ и $\forall j$ изометрия которое представляется в виде

$$isometry(\tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_j)^{-1}): (starball^m(\xi_i, \varepsilon)/G_i^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) \rightarrow (starball^m(\xi_j, \varepsilon)/G_j^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) \quad (53)$$

дополняется до изометрии

$$isometry(\tilde{\sigma}_{i,j}): starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3) \rightarrow starball^m(\xi_j, \varepsilon)(m \geq 3) \quad (54)$$

Более того,

$$\begin{aligned} isometry(\sigma_i) &= \pi \cdot isometry(\tilde{\sigma}_i) = isometry(\tilde{\sigma}_j(\tilde{\sigma}_j)^{-1} \cdot \pi \cdot isometry(\tilde{\sigma}_i)) \\ &= \pi \cdot isometry(\tilde{\sigma}_j) \cdot isometry(\tilde{\sigma}_{i,j}) = isometry(\tilde{\sigma}_{i,j}) \cdot isometry(\tilde{\sigma}_j) \end{aligned} \quad (55)$$

Отсюда получим, что

$$isometry(\tilde{\sigma}_{i,j}) = \frac{isometry(\tilde{\sigma}_i)}{isometry(\tilde{\sigma}_j)} \quad (56)$$

Далее предположим, что

$$isometry(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*) = f(\tilde{\wp}) \cdot f(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot f^{-1}(\wp) = \wp_\Sigma^* \quad (57)$$

порождает пару звездно - собственного звездчатого спаривания

$$\{bd.starside(\wp_2) \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)\} \subseteq \{\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)\} \quad (58)$$

к парам звездно - собственного звездчатого спаривания

$$\{bd.starside(\wp_1) \cap starball^m(\xi_j, \varepsilon)(m \geq 3)\} \subseteq \{\wp_j \cap starball^m(\xi_j, \varepsilon)(m \geq 3)\} \quad (59)$$

Тогда гомотетия

$$hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) = \psi^{-1}(\wp \in \wp_\Omega^*) \cdot \psi(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \cdot \psi(\tilde{\wp} \in \wp_\Omega^*), \quad (60)$$

то есть $hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \in G^* \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)$ сжимается к гомотетию

$$cl.hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*): starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3) \rightarrow starball^m(\xi_j, \varepsilon)(m \geq 3) \quad (61)$$

Заметим, что

$$isometry(\sigma_i) = isometry(\sigma_j) \cdot cl.hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \quad (62)$$

на открытом множестве

$$\begin{aligned} nbhd(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) &= ((\wp_{i(*)} \in \wp_\Omega^*) \cup (bd.\wp_2 \in \wp_\Omega^*) \cup hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*)^{-1} \cdot (\wp_{j(*)} \in \wp_\Omega^*)) \\ &\cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3) \end{aligned} \quad (63)$$

Следовательно, на открытом множестве имеем

$$\begin{aligned} &\frac{isometry(\sigma_{i,j}^{**}) \cdot nbhd(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*)}{isometry(\sigma_j) \cdot cl.hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \cdot isometry(\sigma_{i,j}^{**})^{-1}} \\ &= isometry(\sigma_j) = isometry(\sigma_i) \cdot isometry(\sigma_{i,j}^{**})^{-1} \end{aligned} \quad (64)$$

Поэтому гомотетия $cl.hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \cdot isometry(\sigma_{i,j}^{**})^{-1}$ сжимается элементами из подгруппы $G_j^* \subset G^*$. Следовательно,

$$cl.hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \cdot isometry(\sigma_{i,j}^{**}) = G_j^* \subset G^* \quad (65)$$

Таким образом, мы имеем

$$hom o thety(\zeta_{i,j}) = hom o thety(bd.\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \quad (66)$$

Предположим, что

$$\xi_i = \{\xi_{i_{k-1}} \cong \xi_{i_k}\}_{k=2}^l = \xi_j \quad (67)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} isometry(\sigma_j) \cdot \prod_{k=2}^l isometry(\sigma_{i_{k-1}i_k}^*) &= \prod_{k=3}^l isometry(\sigma_{i_{k-1}}) \cdot isometry(\sigma_{i_{k-2}i_{k-1}}^*) \\ &= isometry(\sigma_i) \end{aligned} \quad (68)$$

Отсюда заключаем, что изометрия $isometry(\sigma_{i,j}^{**}) \cdot \prod_{k=2}^l isometry((\sigma_{i_{k-1}i_k}^*)^{-1})$ сжимается элементами из подгруппы $G_j^* \subset G^*$. Следовательно,

$$\text{hom o thety}(\zeta_{i,j}) = \prod_{k=2}^l \text{hom o thety}(\zeta_{i_{k-1}i_k}) \quad (69)$$

Определим

$$\text{nbhd}(\xi, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^s \pi(\xi) \cdot (\wp_i \in \wp_\Omega^* \cap \text{starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \quad (70)$$

Так как множество

$$(\pi(\xi))^{-1} \cdot \text{nbhd}(\xi, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^s (\wp_i \in \wp_\Omega^* \cap \text{starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \quad (71)$$

открыто в \wp_Σ^* , то $\text{nbhd}(\xi, \varepsilon) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$ является открытым множеством. Положим, что $\xi = \xi_{s^*}$ и $\theta_\xi = \theta_k$. Тогда определим отображение

$$\psi_\xi: \bigcup_{i=1}^{s^*} ((\wp_i \in \wp_\Omega^*) \cap \text{starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \rightarrow \text{starball}^m(\xi, \varepsilon)(m \geq 3)/\theta_\xi \quad (72)$$

по закону (73):

$$\psi_\xi(\vartheta) = \theta_\xi \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i,k})(\vartheta), \vartheta \in ((\wp_i \in \wp_\Omega^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)) \cap \text{starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)$$

Следовательно,

$$\text{hom o thety}(bd. \wp_1 \in \wp_\Omega^*)(\xi_i) = \xi_j \quad (74)$$

Таким образом, получим

$$\text{hom o thety}(\zeta_{i,j})(\xi_i) = \text{hom o thety}(bd. \wp_1 \in \wp_\Omega^*)(\xi_i) = \xi_j \quad (75)$$

Далее пусть точка $\eta_1 \in (((bd. \wp_1 \in \wp_\Omega^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)) \cap \text{starball}^m(\xi_j, \varepsilon))$. И пусть точка $\eta_2 \in (((bd. \wp_2 \in \wp_\Omega^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3)) \cap \text{starball}^m(\xi_i, \varepsilon))$. Тогда

$$\eta_2 \in (\text{hom o thety}(bd. \wp_1 \in \wp_\Omega^*)(\eta_1))^{-1} \quad (76)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{isometry}(\sigma_k) \cdot \text{isometry}(\sigma_{j,k}^*) \cdot \text{isometry}(\sigma_{i,j}^*) &= \text{isometry}(\sigma_j) \cdot \text{isometry}(\varpi_{i,j}^*) \\ &= \text{isometry}(\sigma_i) = \text{isometry}(\sigma_k) \cdot \text{isometry}(\sigma_{i,k}^*) \quad (77) \end{aligned}$$

Следовательно, изометрия

$$\text{isometry}(\sigma_{i,k}^*) \cdot (\text{isometry}(\sigma_{j,k}^*) \cdot \text{isometry}(\sigma_{i,j}^*))^{-1} \quad (78)$$

сжимается элементами из θ_ξ . Отсюда имеем, что

$$\text{hom o thety}(\zeta_{i,k}) \cdot (\text{hom o thety}(\zeta_{j,k}) \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i,j}))^{-1} \in \theta_\xi \quad (79)$$

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \psi_\xi(\eta_1) &= \theta_\xi \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{j,k})(\eta_1) \\ &= \theta_\xi \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{j,k}) \cdot \text{hom o thety}(bd. \wp_1 \in \wp_\Omega^*)(\eta_2) \\ &= \theta_\xi \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{j,k}) \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i,j})(\eta_2) \\ &= \theta_\xi \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i,k})(\eta_2) = \psi_\xi(\eta_2) \quad (80) \end{aligned}$$

И так, отображение ψ_ξ непрерывно индуцирует отображение

$$\psi_\xi^*: \text{nbhd}(\xi, \varepsilon) \rightarrow (\text{starball}^m(\xi, \varepsilon)(m \geq 3)/\theta_\xi) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3), \quad (81)$$

но с другой стороны любое $\forall J$ таково, что отображение ψ_ξ^* также сжимается к отображению

$$\tilde{\psi}_\xi: \mathcal{E}(\xi, J) \rightarrow (\text{starball}^m(\xi, J)(m \geq 3)/\theta_\xi) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) \quad (82)$$

Пусть теперь точка $\vartheta \in (\wp_i \cap \text{starball}^m(\xi, J)(m \geq 3))$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\xi \cdot \pi(\xi)(\vartheta) &= \psi_\xi(\vartheta) = \pi_k(\xi) \cdot isometry(\sigma_{i,k}^{**})(\vartheta) \\ &= (isometry(\tilde{\sigma}_k))^{-1} \cdot isometry(\tilde{\sigma}_i) \cdot \pi_i(\xi)(\vartheta) \\ &= (isometry(\tilde{\sigma}_k))^{-1} \cdot isometry(\tilde{\sigma}_i)(\vartheta) \\ &= (isometry(\tilde{\sigma}_k))^{-1} \cdot \pi(\xi)(\vartheta) \quad (83)\end{aligned}$$

Следовательно, мы получим

$$\tilde{\psi}_\xi = (isometry(\tilde{\sigma}_k))^{-1} \quad (84)$$

Таким образом, отображение $\tilde{\psi}_\xi$ - изометрия. Отсюда заключаем, что отображение ψ_ξ^* - биекция с непрерывной инверсией, определенной по закону

$$(\psi_\xi^*(\theta_\xi \cdot \vartheta))^{-1} = \pi(\xi) \cdot homothety(\zeta_{i,k})(\vartheta))^{-1}, \quad (85)$$

где $\vartheta \in (homothety(\zeta_{i,k}) \cdot (\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)))$.

Значит, отображение ψ_ξ^* - гомеоморфизм. Теперь докажем, что пространство S - хаусдорфово. Для этого возьмем точки $(\xi, \eta) \in \wp_\Sigma^*$ такими как в **лемме2**, что $(\pi(\xi), \pi(\eta)) \in S \subset Mm(m \geq 3)$, причем циклы точек $(\xi, \eta) \in \wp_\Sigma^*$ таковы, что имеет место $(\{\xi_i\}_{i=1}^m, \{\eta_j\}_{j=1}^n) \in \wp_\Sigma$. Тогда очевидно, что $(\{\xi_i\}_{i=1}^m \cap \{\eta_j\}_{j=1}^n = \emptyset) \in \wp_\Sigma^*$. Пусть далее $\xi_i \in \wp_i \subset Mm(m \geq 3)$ и $\eta_j \in \wp_j \subset Mm(m \geq 3)$. Тогда, не умаляя общности, как в **лемме2**, мы имеем право выбирать радиусы звездчатых открытых (замкнутых) шаров $ball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)$ или $cl.ball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)$ и $ball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)$ или $cl.ball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)$ такими, чтобы имели место выражения

$$nbhd_\xi(\xi, \varepsilon) = \pi(\xi) \cdot (\cup_{i=1}^m (\wp_i \cap starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))), \quad (86)$$

$$nbhd_\eta(\eta, \omega) = \pi(\eta) \cdot (\cup_{j=1}^n (\wp_j \cap starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3))) \quad (87)$$

или

$$cl.nbhd_\xi(\xi, \varepsilon) = \pi(\xi) \cdot (\cup_{i=1}^m (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))), \quad (88)$$

$$cl.nbhd_\eta(\eta, \omega) = \pi(\eta) \cdot (\cup_{j=1}^n (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3))) \quad (89)$$

Далее, ход нашего рассуждения проводим на случай замкнутых шаров, а случай - открытых шаров проводится аналогично. И так следует отметить, что при надобности мы можем выбирать, как в **лемме2**, радиусы звездчатых замкнутых шаров $cl.ball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)$ и $cl.ball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)$ настолько малы, что справедливо (90):

$$\left(\bigcup_{i=1}^m (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \right) \cap_{(i \neq j)} \left(\bigcup_{j=1}^n (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) = \emptyset$$

Так как

$$(\pi(\xi))^{-1} \cdot cl.nbhd_\xi(\xi, \varepsilon) = (\cup_{i=1}^m (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))), \quad (91)$$

$$(\pi(\eta))^{-1} \cdot cl.nbhd_\eta(\eta, \omega) = (\cup_{j=1}^n (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3))), \quad (92)$$

то имеем

$$(nbhd_\xi(\xi, \varepsilon) \in \pi(\xi)) \cap_{(\xi \neq \eta)} (nbhd_\eta(\eta, \omega) \in \pi(\eta)) = \emptyset \quad (93)$$

Следовательно пространство S , полученное посредством склейки конечного семейства N - непересекающихся выпуклых и невыпуклых звездоздальных многогранников в многообразии $\Omega^m(m \geq 3)$ с помощью собственного G - бокового (стороннего) спаривания G (тем более, когда оно касается $S^* \subset S$ - подпространство, полученное посредством склейки вместе с конечными семействами непересекающихся звездоздров \wp_Ω^* по звездно - собственному звездчатому спариванию множества \wp_Σ^*) является

хаусдорфовым. Таким образом, пространство $\mathbf{S} \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$ - m - звездное многообразие в склеенном пространстве \mathbf{III} звездных геометрических тел $\mathbf{Mm}(m \geq 3) \subseteq \mathbf{III}$. Докажем, что множество вида (94):

$$\{\psi_{\xi}^*: nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \rightarrow starball^m(\xi, \varepsilon)(m \geq 3)/\theta_{\xi} | \xi \in \mathcal{P}_{\Sigma}^*, \varepsilon < \frac{\delta(\xi)}{7}\} \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3) \subseteq \mathbf{III}$$

является (\mathbf{S}, G) - атласом. По конструкции окрестность $nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon)$ - есть открытая связная подгруппа $G^* \subset \mathbf{S}^* \subset \mathbf{S}$ пространства \mathbf{S} и отображения ψ_{ξ}^* - гомеоморфизм; более того, $nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon)$ - есть окрестность, определяемая для любой точки $\forall \pi(\xi)$ и имеющая достаточно малый радиус ε . Следовательно, окрестность $nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon)$ - открытое покрытие в звездном геометрическом теле $\mathbf{Mm}(m \geq 3) \subseteq \mathbf{III}$. Далее предположим, что множества

$$\{nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon), nbhd_{\eta}(\eta, \omega), nbhd_{\vartheta}(\vartheta, \tau), \dots, nbhd_{\mu}(\mu, \nu)\} \quad (95)$$

и составляют это покрытие. И пусть радиусы звездчатых замкнутых шаров $cl.ball^m(\xi, \varepsilon)(m \geq 3)$, $cl.ball^m(\eta, \omega)(m \geq 3)$, $cl.ball^m(\vartheta, \tau)(m \geq 3)$, \dots , $cl.ball^m(\mu, \nu)(m \geq 3)$ соответственно подчинены закону

$$\varepsilon < \frac{\delta(\xi)}{7}, \omega < \frac{\delta(\eta)}{7}, \tau < \frac{\delta(\vartheta)}{7}, \nu < \frac{\delta(\mu)}{7} \quad (96)$$

Также пусть точки

$$\varpi \in cl.ball^m(\xi, \varepsilon)(m \geq 3), u \in cl.ball^m(\eta, \omega)(m \geq 3), o \in cl.ball^m(\vartheta, \tau)(m \geq 3), \dots,$$

$$\chi \in cl.ball^m(\mu, \nu)(m \geq 3) \quad (97)$$

таковы, что для них выполняются

$$(\psi_{\xi}^*)^{-1} \cdot \psi_{\eta}^* \cdot (\theta_{\xi} \cdot \varpi) = \theta_{\eta} \cdot u, \quad (98)$$

$$(\psi_{\xi}^*)^{-1} \cdot \psi_{\vartheta}^* \cdot (\theta_{\xi} \cdot \varpi) = \theta_{\vartheta} \cdot \vartheta, \quad (99)$$

$$(\psi_{\xi}^*)^{-1} \cdot \psi_{\mu}^* \cdot (\theta_{\xi} \cdot \varpi) = \theta_{\mu} \cdot \nu, \quad (100)$$

$$(\psi_{\eta}^*)^{-1} \cdot \psi_{\vartheta}^* \cdot (\theta_{\eta} \cdot u) = \theta_{\vartheta} \cdot \vartheta, \quad (101)$$

$$(\psi_{\eta}^*)^{-1} \cdot \psi_{\mu}^* \cdot (\theta_{\eta} \cdot u) = \theta_{\mu} \cdot \nu, \quad (102)$$

$$(\psi_{\vartheta}^*)^{-1} \cdot \psi_{\mu}^* \cdot (\theta_{\vartheta} \cdot \vartheta) = \theta_{\mu} \cdot \nu \quad (103)$$

Тогда найдутся такие элементы $(\zeta \in G) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$, $(\zeta^* \in G) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$, $(\zeta^{**} \in G) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$, что для них соответственно выполняются равенства

$$\zeta \cdot \varpi = u, \zeta^* \cdot u = \vartheta,$$

$$\zeta \cdot \varpi = \vartheta, \text{ -----}$$

$$\text{-----} \zeta^* \cdot u = \nu, \quad (104)$$

$$\zeta \cdot \varpi = \nu, \text{ -----}$$

$$\zeta^{**} \cdot \vartheta = \nu$$

и отображения

$$((\psi_{\xi}^*)^{-1} \cdot \psi_{\eta}^*), ((\psi_{\xi}^*)^{-1} \cdot \psi_{\vartheta}^*), \dots, ((\psi_{\xi}^*)^{-1} \cdot \psi_{\mu}^*), \quad (105)$$

$$((\psi_{\eta}^*)^{-1} \cdot \psi_{\vartheta}^*), \dots, ((\psi_{\eta}^*)^{-1} \cdot \psi_{\mu}^*), \dots, ((\psi_{\vartheta}^*)^{-1} \cdot \psi_{\mu}^*) \quad (106)$$

соответственно расширяются в окрестностях точек ϖ , u и ϑ через элементы

$$(\zeta \in G) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3), (\zeta^* \in G) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3), (\zeta^{**} \in G) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3) \quad (107)$$

Пусть имеет место

$$\xi \in \widetilde{\text{int.}} \Lambda(\xi) = \text{face}(\wp \in \wp_\Omega^*) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3) \quad (108)$$

Меняя местами точки $\xi, \eta, \theta, \dots, \mu$ упорядочим их в порядке убывания, то есть

$$\text{dim.}(\tilde{\Lambda}(\xi)) \geq \text{dim.}(\tilde{\Lambda}(\eta)) \geq \dots \geq \text{dim.}(\tilde{\Lambda}(\mu)), \quad (109)$$

причем $\varepsilon \leq \omega \leq \tau \leq \dots \leq \nu$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\pi(\xi))^{-1} \cdot \text{cl. nbhd}_\xi(\xi, \varepsilon) &= (\cup_{i=1}^{\tilde{m}}(\wp_i \cap \text{cl. starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3), (\pi(\eta))^{-1} \cdot \\ \text{cl. nbhd}_\eta(\eta, \omega) &= (\cup_{j=1}^{\tilde{n}}(\wp_j \cap \text{cl. starball}^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3))) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3), (\pi(\theta))^{-1} \cdot \text{cl. nbhd}_\theta(\theta, \tau) = \\ &= (\cup_{k=1}^{\tilde{l}}(\wp_k \cap \text{cl. starball}^m(\theta_k, \tau)(m \geq 3))) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3), \end{aligned}$$

$$(\pi(\mu))^{-1} \cdot \text{cl. nbhd}_\mu(\mu, \nu) = (\cup_{\kappa=1}^{\tilde{v}}(\wp_\kappa \cap \text{cl. starball}^m(\mu_\kappa, \nu)(m \geq 3))) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$$

И пусть далее для некоторых i, j, k, \dots, κ имеют место соотношения (110):

$$\left(\cup_{i=1}^{\tilde{m}}(\wp_i \cap \text{cl. starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \right) \cap_{(i \neq j)} \left(\cup_{j=1}^{\tilde{n}}(\wp_j \cap \text{cl. starball}^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) \neq \emptyset,$$

$$\left(\cup_{i=1}^{\tilde{m}}(\wp_i \cap \text{cl. starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \right) \cap_{(i \neq k)} \left(\cup_{k=1}^{\tilde{l}}(\wp_k \cap \text{cl. starball}^m(\theta_k, \tau)(m \geq 3)) \right) \neq \emptyset,$$

$$\left(\cup_{i=1}^{\tilde{m}}(\wp_i \cap \text{cl. starball}^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \right) \cap_{(i \neq \kappa)} \left(\cup_{\kappa=1}^{\tilde{v}}(\wp_\kappa \cap \text{cl. starball}^m(\mu_\kappa, \nu)(m \geq 3)) \right) \neq \emptyset,$$

$$\left(\cup_{j=1}^{\tilde{n}}(\wp_j \cap \text{cl. starball}^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) \cap_{(j \neq \kappa)} \left(\cup_{k=1}^{\tilde{l}}(\wp_k \cap \text{cl. starball}^m(\theta_k, \tau)(m \geq 3)) \right) \neq \emptyset,$$

$$\left(\cup_{j=1}^{\tilde{n}}(\wp_j \cap \text{cl. starball}^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) \cap_{(j \neq \kappa)} \left(\cup_{\kappa=1}^{\tilde{v}}(\wp_\kappa \cap \text{cl. starball}^m(\mu_\kappa, \nu)(m \geq 3)) \right) \neq \emptyset,$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}}(\wp_k \cap \text{cl. starball}^m(\theta_k, \tau)(m \geq 3)) \right) \cap_{(k \neq \kappa)} \left(\bigcup_{\kappa=1}^{\tilde{v}}(\wp_\kappa \cap \text{cl. starball}^m(\mu_\kappa, \nu)(m \geq 3)) \right) \neq \emptyset$$

Тогда справедливы следующие равенства звездоздров в звездном геометрическом теле $\mathbf{Mm}(m \geq 3)$ (111):

$$\begin{aligned} (\wp_i \in \wp_\Omega^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) &= (\wp_j \in \wp_\Omega^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) = (\wp_k \in \wp_\Omega^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3) \\ &= \dots = (\wp_\kappa \in \wp_\Omega^*) \subseteq \mathbf{Mm}(m \geq 3), \end{aligned}$$

причем

$$\text{dist.}(\xi_i, \eta_j) < 7(\varepsilon + \omega), \text{dist.}(\eta_j, \theta_k) < 7(\omega + \tau),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \theta_k) < 7(\varepsilon + \tau), \text{-----}$$

$$\text{----- dist.}(\eta_j, \mu_\kappa) < 7(\omega + \nu), \quad (112)$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + \nu), \text{-----}$$

$$\text{dist.}(\theta_k, \mu_\kappa) < 7(\tau + \nu)$$

Далее, принимая во внимание условия (109), заключаем, что

$$\varepsilon < \frac{\text{dist.}(\xi_i, \eta_j)}{7},$$

$$\tau < \frac{\text{dist.}(\xi_i, \theta_k)}{7},$$

----- (113)

$$\nu < \frac{\text{dist.}(\xi_i, \mu_\kappa)}{7},$$

$$\omega < \frac{\text{dist.}(\eta_j, \theta_k)}{7}$$

Следовательно,

$$\text{dist.}(\xi_i, \eta_j) + \text{dist.}(\xi_i, \theta_k) < 7(2\varepsilon + \omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \eta_j) + \text{dist.}(\xi_i, \mu_\kappa) < 7(2\varepsilon + \omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \eta_j) + \text{dist.}(\eta_j, \theta_k) < 7(2\varepsilon + \omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \eta_j) + \text{dist.}(\eta_j, \mu_\kappa) < 7(2\varepsilon + \omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \eta_j) + \text{dist.}(\theta_k, \mu_\kappa) < 7(2\varepsilon + \omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \theta_k) + \text{dist.}(\xi_i, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + 2\omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \theta_k) + \text{dist.}(\eta_j, \theta_k) < 7(\varepsilon + 2\omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \theta_k) + \text{dist.}(\eta_j, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + 2\omega + \tau + \dots + \nu), \quad (114)$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \theta_k) + \text{dist.}(\theta_k, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + 2\omega + \tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \mu_\kappa) + \text{dist.}(\eta_j, \theta_k) < 7(\varepsilon + \omega + 2\tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \mu_\kappa) + \text{dist.}(\eta_j, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + \omega + 2\tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\xi_i, \mu_\kappa) + \text{dist.}(\theta_k, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + \omega + 2\tau + \dots + \nu),$$

$$\text{dist.}(\eta_j, \theta_k) + \text{dist.}(\eta_j, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + \omega + \tau + \dots + 2\nu),$$

$$\text{dist.}(\eta_j, \theta_k) + \text{dist.}(\theta_k, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + \omega + \tau + \dots + 2\nu),$$

$$\text{dist.}(\eta_j, \mu_\kappa) + \text{dist.}(\theta_k, \mu_\kappa) < 7(\varepsilon + \omega + \tau + \dots + 2\nu)$$

Пусть для любого элемента $(\xi, \eta, \theta, \dots, \mu) \in \mathbf{Mm}(m \geq 3)$, как в лемме2, очевидно, что (115):

$$(\text{isometry}(\zeta_{i,j}), \text{isometry}(\zeta_{i,j}^*), \text{isometry}(\zeta_{i,j}^\mu), \dots, \text{isometry}(\zeta_{i,j}^\mu)) \in G \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$$

И пусть изометрия

$$\text{isometry}(\text{bd. starside}(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) = O(\tilde{\wp}) \cdot \tilde{O}(\text{bd. starside}(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot O^{-1}(\wp) \quad (116)$$

порождает пару звездчатого спаривания (58) с парами звездчатого спаривания (59). Тогда очевидно, что

$$\text{isometry}(\text{bd. starside}(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) = O(\tilde{\wp}) \cdot \tilde{O}(\text{bd. starside}(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot O^{-1}(\wp)$$

$$= isometry(\zeta_{i,j}), (117)$$

$$isometry(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot \xi_i = O(\tilde{\wp}) \cdot \tilde{O}(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot O^{-1}(\wp) \cdot \xi_i = \xi_j,$$

причем $\xi_i \in bd.starside(\wp_2 \in \wp_\Omega^*) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$. Так как (118):

$$(\cup_{i=1}^m(\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \cap_{(i)}(\cup_{i=1}^m(\wp_i \cap cl.starball^m(\eta_i, \omega)(m \geq 3))) \neq \emptyset,$$

то ясно, что $\eta_i \in bd.starside(\wp_2) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3)$. Следовательно, (119):

$$\begin{aligned} & (isometry(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*))) \cdot (\cup_{i=1}^m(\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \\ & \cap_{(i)}(isometry(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*))) \cdot (\cup_{i=1}^m(\wp_i \cap cl.starball^m(\eta_i, \omega)(m \geq 3))) \\ & = (O(\tilde{\wp}) \cdot \tilde{O}(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot O^{-1}(\wp)) \cdot (\cup_{i=1}^m(\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon))) \\ & \cap_{(i)}(O(\tilde{\wp}) \cdot \tilde{O}(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot O^{-1}(\wp)) \cdot (\cup_{i=1}^m(\wp_i \cap cl.starball^m(\eta_i, \omega)(m \geq 3))). \end{aligned}$$

Так же получим (120):

$$\begin{aligned} & (\cup_{j=1}^n(\wp_j \cap starball^m(\xi_j, \varepsilon)(m \geq 3))) \\ & \cap_{(j \neq i)}(\cup_{j=1}^n(\wp_j \cap starball^m(isometry(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*)) \cdot \eta_i, \omega))) \subset \mathbf{Mm}(m \geq 3). \end{aligned}$$

Таким образом

$$(isometry(bd.starside(\wp_1 \in \wp_\Omega^*) \cdot \eta_i, \omega) = \eta_j) (121)$$

И так, получим

$$isometry(\zeta_{i,j}) = isometry(\zeta_{i,j}^*) (122)$$

Проводя аналогичную процедуру, как это имело место выше, для изометрии $isometry(\zeta_{i,j}^*), isometry(\zeta_{i,j}^{**}), \dots, isometry(\zeta_{i,j}^{\mu})$, мы получим цепочку равенств

$$isometry(\zeta_{i,j}) = isometry(\zeta_{i,j}^*) = \dots = isometry(\zeta_{i,j}^{\mu}) (123)$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} \xi_i &= \{\xi_{i_{k-1}} \cong \xi_{i_k}\}_{k=2}^{l^*} = \xi_j, \\ \eta_i &= \{\eta_{i_{k-1}} \cong \eta_{i_k}\}_{k=2}^{l^*} = \eta_j, \\ &----- (124) \\ &----- \\ \mu_i &= \{\mu_{i_{k-1}} \cong \mu_{i_k}\}_{k=2}^{l^*} = \mu_j \end{aligned}$$

Тогда принимая во внимание (78) и (124), имеем

$$isometry(\zeta_{i,j}) = \prod_{k=2}^{l^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}) = \prod_{k=2}^{l^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}^*) = isometry(\zeta_{i,j}^*) (125)$$

Аналогично,

$$isometry(\zeta_{i,j}^*) = \prod_{k=2}^{l^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}^{**}) = \prod_{k=2}^{l^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}^{**}) = isometry(\zeta_{i,j}^{**}) (126)$$

Также

$$isometry(\zeta_{i,j}^{**}) = \prod_{k=2}^{l^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}^{\mu}) = \prod_{k=2}^{l^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}^{\mu}) = isometry(\zeta_{i,j}^{\mu}) (127)$$

И, наконец,

$$isometry(\zeta_{i,j}^{\mu-1}) = \prod_{k=2}^{i^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}^{\mu-1}) = \prod_{k=2}^{i^*} isometry(\zeta_{i_{k-1}j_k}^{\mu}) = isometry(\zeta_{i,j}^{\mu}) \quad (128)$$

После рассмотрим, как в **лемме2**, комбинации всевозможных пересечений окрестностей замкнутых звездчатых дисков (129):

$$\begin{aligned} & (cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\eta}(\eta, \omega)) \subset Mm(m \geq 3) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot \left(\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3)) \right) \right) \cap_{(i \neq j)} \left(\pi(\eta) \cdot \left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) \right) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot \pi(\eta) (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq j)} \left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot \pi(\eta) (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} \bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq j)} (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau)) \subset Mm(m \geq 3) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq k)} \left(\pi(\tilde{\theta}) \cdot (\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3))) \right) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot \pi(\tilde{\theta}) (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq k)} (\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3))) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot \pi(\tilde{\theta}) (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} \bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq k)} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \subset Mm(m \geq 3) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq \kappa)} \left(\pi(\tilde{\mu}) \cdot (\bigcup_{\kappa=1}^{\tilde{o}} (\wp_{\kappa} \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3))) \right) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot \pi(\tilde{\mu}) (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq \kappa)} (\bigcup_{\kappa=1}^{\tilde{o}} (\wp_{\kappa} \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3))) \\ &= \left(\pi(\xi) \cdot \pi(\tilde{\mu}) (\bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} \bigcup_{\kappa=1}^{\tilde{o}} (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3))) \right) \cap_{(i \neq \kappa)} (\wp_{\kappa} \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (cl.nbhd_{\eta}(\eta, \omega) \cap cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau)) \subset Mm(m \geq 3) \\ &= \left(\pi(\eta) \cdot \left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) \right) \cap_{(j \neq k)} \left(\pi(\tilde{\theta}) \cdot \left(\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3)) \right) \right) \\ &= \left(\pi(\eta) \cdot \pi(\tilde{\theta}) \left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} \bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\eta_j, \omega)(m \geq 3)) \right) \right) \cap_{(j \neq k)} \left(\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3)) \right) \end{aligned}$$

$$= (\pi(\tilde{\eta}) \cdot \pi(\tilde{\theta})(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} \bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_j, \omega)(m \geq 3)) \cap_{(j \neq k)} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3))))$$

$$(cl.nbhd_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \subset Mm(m \geq 3)$$

$$= (\pi(\tilde{\eta}) \cdot (\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_j, \omega)(m \geq 3)))) \cap_{(j \neq k)} (\pi(\tilde{\mu}) \cdot (\bigcup_{k=1}^{\tilde{\sigma}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_k, \nu)(m \geq 3))))$$

$$= (\pi(\tilde{\eta}) \cdot \pi(\tilde{\mu})(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_j, \omega)(m \geq 3)))) \cap_{(j \neq k)} (\bigcup_{k=1}^{\tilde{\sigma}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_k, \nu)(m \geq 3))) = (\pi(\tilde{\eta}) \cdot \pi(\tilde{\mu})(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} \bigcup_{k=1}^{\tilde{\sigma}} (\wp_j \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_j, \omega)(m \geq 3)) \cap_{(j \neq k)} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_k, \nu)(m \geq 3))))$$

$$(cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \subset Mm(m \geq 3)$$

$$= (\pi(\tilde{\theta}) \cdot (\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3)))) \cap_{(k \neq \kappa)} (\pi(\tilde{\mu}) \cdot (\bigcup_{\kappa=1}^{\tilde{\sigma}} (\wp_{\kappa} \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3)))) = (\pi(\tilde{\theta}) \cdot \pi(\tilde{\mu})(\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3)) \cap_{(k \neq \kappa)} (\bigcup_{\kappa=1}^{\tilde{\sigma}} (\wp_{\kappa} \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3)))) = (\pi(\tilde{\theta}) \cdot \pi(\tilde{\mu})(\bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} \bigcup_{\kappa=1}^{\tilde{\sigma}} (\wp_k \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3)) \cap_{(k \neq \kappa)} (\wp_{\kappa} \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3))))$$

Введем обозначения

$$\xi = \xi_{i^*}, \eta = \eta_{j^*}, \theta = \theta_{k^*}, \dots, \mu = \mu_{\kappa^*} \quad (130)$$

Тогда (131):

$$\begin{aligned} & \psi_{\xi}^{**}(cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \\ &= \bigcup_{i=1}^{m^*} isometry(\tilde{\zeta}_{i^*}) (\wp_i \cap cl.starball^m(\xi_i, \varepsilon)(m \geq 3) \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_i, \omega)(m \geq 3) \\ & \quad \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_i, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_i, \nu)(m \geq 3)) \\ & \psi_{\eta}^{**}(cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \\ &= \bigcup_{j=1}^{n^*} isometry(\tilde{\zeta}_{j^*}) (\wp_j \cap cl.starball^m(\xi_j, \varepsilon)(m \geq 3) \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_j, \omega)(m \geq 3) \\ & \quad \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_j, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_j, \nu)(m \geq 3)) \\ & \psi_{\theta}^{**}(cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \\ &= \bigcup_{k=1}^{l^*} isometry(\tilde{\zeta}_{k^*}) (\wp_k \cap cl.starball^m(\xi_k, \varepsilon)(m \geq 3) \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_k, \omega)(m \geq 3) \\ & \quad \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_k, \nu)(m \geq 3)) \\ & \psi_{\mu}^{**}(cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \\ &= \bigcup_{\kappa=1}^{\sigma^*} isometry(\tilde{\zeta}_{\kappa^*}) (\wp_{\kappa} \cap cl.starball^m(\xi_{\kappa}, \varepsilon)(m \geq 3) \cap cl.starball^m(\tilde{\eta}_{\kappa}, \omega)(m \geq 3) \\ & \quad \cap cl.starball^m(\tilde{\theta}_{\kappa}, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap cl.starball^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3)). \end{aligned}$$

Еще раз водим обозначения

$$\xi = \xi_{i^{**}}, \eta = \eta_{j^{**}}, \theta = \theta_{k^{**}}, \dots, \mu = \mu_{\kappa^{**}} \quad (132)$$

и проводим процедуру, аналогичную приведенной выше. Тогда получим, что (133):

$$\psi_{\xi}^{***}(cl.nbhd_{\xi}(\xi, \varepsilon) \cap cl.nbhd_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap cl.nbhd_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap cl.nbhd_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu))$$

$$\begin{aligned}
&= \cup_{i=1}^{m^*} \text{isometry}(\tilde{\zeta}_{ii^*})(\wp_i \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\xi}_i, \varepsilon)(m \geq 3) \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\eta}_i, \omega)(m \geq 3) \\
&\quad \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\theta}_i, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\mu}_i, \nu)(m \geq 3) \\
&\quad \psi_{\tilde{\eta}}^{***}(\text{cl. nbhd}_{\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \varepsilon) \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \\
&= \cup_{j=1}^{m^*} \text{isometry}(\tilde{\zeta}_{jj^*})(\wp_j \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\xi}_j, \varepsilon)(m \geq 3) \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\eta}_j, \omega)(m \geq 3) \\
&\quad \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\theta}_j, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\mu}_j, \nu)(m \geq 3) \\
&\quad \psi_{\tilde{\theta}}^{***}(\text{cl. nbhd}_{\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \varepsilon) \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \\
&= \cup_{k=1}^{l^*} \text{isometry}(\tilde{\zeta}_{kk^*})(\wp_k \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\xi}_k, \varepsilon)(m \geq 3) \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\eta}_k, \omega)(m \geq 3) \\
&\quad \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\theta}_k, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\mu}_k, \nu)(m \geq 3) \\
&\quad \psi_{\tilde{\mu}}^{***}(\text{cl. nbhd}_{\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \varepsilon) \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\eta}}(\tilde{\eta}, \omega) \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tau) \cap \dots \cap \text{cl. nbhd}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mu}, \nu)) \\
&= \cup_{\kappa=1}^{\sigma^*} \text{isometry}(\tilde{\zeta}_{\kappa\kappa^*})(\wp_{\kappa} \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\xi}_{\kappa}, \varepsilon)(m \geq 3) \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\eta}_{\kappa}, \omega)(m \geq 3) \\
&\quad \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\theta}_{\kappa}, \tau)(m \geq 3) \cap \dots \cap \text{cl. starball}^m(\tilde{\mu}_{\kappa}, \nu)(m \geq 3).
\end{aligned}$$

Далее предположим, что точка (134):

$$\vartheta \in \text{hom o thety}(\zeta_{i,k}) \times (\wp_i \in \wp_{\Omega}^*) \cap \text{cl. starball}^m(\xi_{i_1}, \varepsilon)(m \geq 3) \cap \text{cl. starball}^m(\eta_{i_2}, \omega)(m \geq 3).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(\psi_{\xi}^{**})^{-1} \cdot \psi_{\eta}^{**} \cdot \theta_{\xi} \cdot \vartheta &= \psi_{\eta}^{**} \cdot \pi \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i_1 k_1})^{-1} \cdot \vartheta \\
&= \theta_{\eta} \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i_2 l}) \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i_1 k_1})^{-1} \cdot \vartheta \\
&= \theta_{\eta} \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i_2 l}) \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i_2 k_2})^{-1} \cdot \vartheta \\
&= \theta_{\eta} \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i_2 l}) \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{i_2 k_2}) \cdot \vartheta \\
&= \theta_{\eta} \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{k_2 l}) \cdot \vartheta. \quad (135)
\end{aligned}$$

Следовательно, $\text{hom o thety}(\zeta_{k_2 l})$ как элемент является лифтом отображения $(\psi_{\xi}^{**})^{-1} \cdot \psi_{\eta}^{**}$. Таким образом, существует такой элемент $\zeta_1 \in \theta_{\eta}$, что справедливо

$$\zeta_1 \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{k_2 l}) \cdot \varpi = \theta. \quad (136)$$

И пусть элемент $\zeta_2 = \zeta_1 \cdot \text{hom o thety}(\zeta_{k_2 l})$. Тогда элемент $\zeta_2 \in G$ таков, что имеет место $\zeta_2 \cdot \varpi = \theta$. Следовательно, элемент $\zeta_2 \in G$ является лифтом отображения

$(\psi_{\xi}^{**})^{-1} \cdot \psi_{\eta}^{**}$ в окрестности точки ϖ . Отсюда делаем выводы, что функция $\{\psi_{\xi}^{**}\}$ является (S, G) -атласом для пространства $\mathbf{Ш} \subset \mathbf{M}m(m \geq 3)$ в звездном геометрическом теле $\mathbf{M}m(m \geq 3)$. Этим полностью завершается доказательство **теоремы 2**.

Заключение

С помощью собственного (бокового) спаривания вдоль стороны выпуклых и невыпуклых звездодральных многогранников, построены все неевклидовы склеенные многообразия. Путем хирургии Уильяма Пола Терстона получены склеенные пространства из всех атласных карт покрытий звездного геометрического тела и его расщеплений, обладающие симметрией произвольной симплицальной группы в трех и более измерениях.

Список литературы/References

1. Абдыманапов У. Геометрия гиперболического многообразия //Сборник материалов международной научно - практической конференции. Том II, Бишкек, 1995. - С.5 - 6.
2. Абдыманапов У. Метрическая геометрия действительных орбиолдов звездных (невыпуклых) тел в размерности - три //Сборник материалов I региональной научной конференции по проблемам алгебры, геометрии и их приложений. Ош: Ош.ГУ, 1996. - С. 29 - 31.
3. Абдыманапов У. Метрическая геометрия комплексных орбиолдов звездных (невыпуклых) тел в размерности - три //Сборник материалов I

региональной научной конференции по проблемам алгебры, геометрии и их приложений. Ош: Ош.ГУ, 1996. - С. 32 - 34.

4. Абдыманапов У. Метрическая геометрия действительных орбиолдов звездных (невыпуклых) тел в размерности - четыре //Труды IV республиканской научно - методической конференции. Часть II, Бишкек, 1996. - С. 112 - 115.

5. Абдыманапов У. Метрическая геометрия комплексных орбиолдов звездных (невыпуклых) тел в размерности - четыре //Труды IV республиканской научно - методической конференции. Часть II, Бишкек, 1996. - С. 116 - 117.

6. Абдыманапов У. Метрически - евклидова геометрия действительных орбиолдов звездных (невыпуклых) тел // I съезд математиков Казахстана. Тезисы докладов. Шымкент: ЮКТУ, 1996. - С. 171 - 172.

7. Абдыманапов У. Метрически - неевклидова геометрия действительных орбиолдов звездных (невыпуклых) тел // I съезд математиков Казахстана. Тезисы докладов. Шымкент: ЮКТУ, 1996. - С. 172 - 173.

8. Абдыманапов У. Метрически - евклидова геометрия комплексных орбиолдов звездных (невыпуклых) тел // Международная геометрическая школа - семинар, посвященная памяти Н.В.Ефимова. Тезисы докладов. Ростов - на - Дону: РГУ, 1996. - С. 83 - 84.

9. Абдыманапов У. Метрическая геометрия действительных (комплексных) h - многообразий Ω^3 звездных (невыпуклых) тел $E^3(E^*)$ // Международный геометрический семинар им. Н.И.Лобачевского. Тезисы докладов. Казань: КГУ им. В.И.Ульянова - Ленина, 1997. - С. 3.

10. Абдыманапов У. Метрическая геометрия действительных (комплексных) многообразий Ω^* звездных (невыпуклых) тел $E(E^*)$ // Международный геометрический семинар им. Н.И.Лобачевского. Тезисы докладов. Казань: КГУ им. В.И.Ульянова - Ленина, 1997. - С. 4.

11. Абдыманапов У. Геометрические и топологические свойства множеств попарно непересекающихся компактов кратности t звездного (невыпуклого) тела E^m в E^m, H^m (или S^m) // Международная конференция по геометрии в 'целом'. Тезисы докладов. Черкассы: ЧИТИ, 1997. - С. 43 - 44.

12. Абдыманапов У. Геометрико - топологические структуры клеточно вложенного континуума звездного (невыпуклого) тела E^m в E^m, H^m (или S^m) // Международная конференция по геометрии в 'целом'. Тезисы докладов. Черкассы: ЧИТИ, 1997. - С. 44 - 45.

13. Абдыманапов У. Метрические характеристики звездного тела E^m // Современные методы в теории краевых задач. Тезисы докладов ВВМШ. Воронеж: ВГУ, 1998. - С. 3.

14. Абдыманапов У. Топология звездного тела E^m и построения его E_i^* - расщеплений // Современные методы в теории краевых задач. Тезисы докладов ВВМШ. Воронеж: ВГУ, 1998. - С. 4.

15. Абдыманапов У. Ретракты звездно - клеточного компакта в звездном расщеплении E_i^m звездного тела E^m // Известия НАН Кыргызской Республики. Бишкек, 1998, №1. - С.5 - 9.

16. Абдыманапов У. Аналог проблемы Карола Борсука для звездно - клеточного компакта $compact(\Sigma)$ в звездном расщеплении E_i^3 звездного тела E^3 // Наука и новые технологии. Бишкек, 2000, №1. - С. 34 - 38.

17. Абдыманапов У. Склеивание (E^3, G) - орбиолдов звездного тела E^3 // МНК АДМ - 2000. Тезисы докладов. Воронеж: ВГУ, 2000. - С. 3.

18. Абдыманапов У. Гомотопически порожденные звездоэдры T_{E^m} из класса $T_{E^m}^*$ - звездоэдров в звездном теле E^m // Международная геометрическая школа - семинар, посвященная 90 - летию Н.В.Ефимова. Тезисы докладов. Ростов - на - Дону: РГУ, 2000. - С. 15 - 16.

19. Абдыманапов У. Фундаментальная группа одного звездного тела E // Труды участников международной школы - семинара по геометрии и анализу, памяти Н.В.Ефимова. Тезисы докладов. Ростов - на - Дону: РГУ, 2002. - С. 15 - 16.

20. Satake Ichiro. On a generalization of the notion of manifold // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1956, 42(6): - pp. 359 - 363.

21. Scott H.P. The geometries of 3 - manifolds // The Bulletin of the London Mathematical Society, 1983, vol.15, Part 5, No. 56. - pp. 401 - 487.

22. Скотт Г.П. Геометрии на трехмерных многообразиях // Скотт Г.П. - М.: Мир, 1986. - 168с.

23. Thurston W.P. The geometry and topology of three manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978 (Lecture Notes).

24. Thurston W.P. Three - dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // The Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1982, vol.6, No. 3, - pp. 357 - 381.

25. Терстон У. Трехмерная геометрия и топология на трехмерных многообразиях // Терстон У. - М.: МЦНМО, 2001. - 312с.

Список литературы на английском языке/References in English

1. U. Abdymanapov. Geometry of a hyperbolic manifold // Collection of materials of the international scientific and practical conference, vol. II, Bishkek, 1995.- pp. 5 - 6.

2. U. Abdymanapov. Metric geometry of real orbifolds of star (nonconvex) bodies in dimension - three // Collection of materials I of the regional scientific conference on the problems of algebra, geometry and their applications. Osh: Osh.SU, 1996. - pp. 29 - 31.

3. U. Abdymanapov. Metric geometry of complex orbifolds star (nonconvex) bodies in dimension - three // Collection of materials I of the regional scientific conference on the problems of algebra, geometry and their applications. Osh: Osh.SU, 1996. -pp. 32 - 34.

4. U. Abdymanapov. Metric geometry of real orbifolds of star (nonconvex) bodies in dimension - four // Proceedings of the IV republican scientific -

methodological conference, Part II, Bishkek, 1996.- pp. 112 - 115.

5. U. Abdymanapov. Metric geometry of complex orbifolds of star (nonconvex) bodies in dimension - four // Proceedings of the IV republican scientific - methodological conference, Part II, Bishkek, 1996.- pp. 116 - 117.

6. U. Abdymanapov. Metrically - euclidean geometry of real orbifolds of star (nonconvex) bodies // I Congress of Mathematicians of Kazakhstan. Abstracts of reports. Shymkent: YUKTU, 1996.- pp. 171 - 172.

7. U. Abdymanapov. Metrically - non - euclidean geometry of real orbifolds of star (nonconvex) bodies // I Congress of Mathematicians of Kazakhstan. Abstracts of reports. Shymkent: YUKTU, 1996.- pp. 172 - 173.

8. U. Abdymanapov. Metrically - euclidean geometry of complex orbifolds of star (nonconvex) bodies // International geometric school - seminar dedicated to the memory of N.V.Efimov. Abstracts of reports. Rostov - on - Don: RSU, 1996.- pp. 83 - 84.

9. U. Abdymanapov. Metric geometry of real (complex) h - manifolds Ω^3 of star (nonconvex) bodies $E^3(E^*)$ // Lobachevsky international geometric seminar. Abstracts of reports. Kazan: KSU named after V.I.Ulyanov - Lenin, 1997.- pp.3.

10. U. Abdymanapov. Metric geometry of real (complex) manifolds Ω^* of star (nonconvex) bodies $E(E^*)$ // Lobachevsky international geometric seminar. Abstracts of reports. Kazan: KSU named after V.I.Ulyanov - Lenin, 1997.- pp.4.

11. U. Abdymanapov. Geometric and topological properties of sets of pairwise disjoint compact sets of multiplicity τ of a star (nonconvex) body E^m in E^m, H^m or S^m // International conference on geometry in 'general'. Abstracts of reports. Cherkassy: Ch.ITI, 1997.- pp.43.

12. U. Abdymanapov. Geometric topological structures of a cell - embedded continuum of a star (nonconvex) body E^m in E^m, H^m or S^m // International conference on geometry in 'general'. Abstracts of reports. Cherkassy: Ch.ITI, 1997.- pp.44 - 45.

13. U. Abdymanapov. Metric characteristics E^m // Modern methods in the theory of boundary value problems. Abstracts of VVMSh reports. Voronezh: VSU, 1998.-pp.3.

14. U. Abdymanapov. The topology of a star body E^m and its construction E_i^m - splits // Modern methods in the theory of boundary value problems. Abstracts of VVMSh reports. Voronezh: VSU, 1998.- pp.4.

15. U. Abdymanapov. Retracts of star - cellular compact in star splitting E_i^m of a star body E^m // Bulletin of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. Bishkek, 1998, №1.- pp. 5 - 9.

16. U. Abdymanapov. An analogue of the Karol Borsuk problem for a star - cellular compact E in a star splitting E_i^3 of a star body E^3 // Science and new technologies. Bishkek, 2000, №1.- pp. 34 - 38.

17. U. Abdymanapov. Gluing (E^3, G) - orbifolds of a star body E^3 // MNC ADM - 2000. Abstracts of reports. Voronezh: VSU, 2000.- pp.3.

18. U. Abdymanapov. Homotopically generated starhedra T_{E^m} from the class $T_{E^m}^*$ - starhedra in a star body E^m // International geometric school - seminar deicath anniversary of N.V.Efimov. Abstracts of reports. Rostov - on - Don: RSU, 2000.-pp. 15 - 16.

19. U. Abdymanapov. Fundamental group of one star body E // Proceedings of the participants of the international school - seminar on geometry and analysis, in memory of N.V.Efimov. Abstracts of reports. Rostov - on - Don: RSU, 2002.- pp. 15 - 16.

20. Satake Ichiro. On a generalization of the notion of manifold // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1956, 42(6): - pp. 359 - 363.

21. Scott, H.P. The geometries of 3 - manifolds // The Bulletin of the London Mathematical Society, 1983, vol. 15, Part 5, No. 56. - pp. 401 - 487.

22. Scott, H.P. Geometries on 3 - manifolds // H.P. Scott. - M.: Mir, 1986. - 168p.

23. Thurston, W.P. The geometry and topology of three manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978 (Lecture Notes).

24. Thurston W.P. Three - dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // The Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1982, vol. 6, No. 3. - pp. 357 - 381.

25. Thurston W.P. Three - dimensional geometry and topology on three - dimensional manifolds // W.P. Thurston. - M.: MTs.NMO, 2001. - 312p.

УКД 539.3

**ПОСТРОЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ***Во Ань Хиеу**Кандидат технических наук, Академия военных наук и технологий, Вьетнам, г. Ханой***CONSTRUCTION OF REFINED MATHEMATICAL MODEL OF REINFORCED CYLINDRICAL
SHELLS BASED ON NON-CLASSICAL THEORY***Vo Anh Hieu**PhD in Engineering, Academy of Military Science and Technology**Vietnam, Hanoi*

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.105.1766

АННОТАЦИЯ

Рассматривается способ уточнения классической теории подкреплённых цилиндрических оболочек. Подкреплённая оболочка моделируется дискретно-континуальной системой с помощью обобщённой дельта-функции Дирака. Область сопряжения ребра с оболочкой схематизируется линией. Перемещения оболочки разлагаются в полиномиальные ряды по нормальной к срединной поверхности координате на один порядок выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява. На основе соотношений трехмерной теории упругости и вариационного принципа Лагранжа построена уточнённая математическая модель подкреплённых оболочек в виде уравнений равновесия и граничных условий.

ABSTRACT

The method of refinement of the classical theory of cylindrical shells, reinforced by annular ribs, is considered. The reinforced shell is modeled by a discrete-continuous system using the generalized Dirac delta function. The area of conjugation between the rib and the shell is schematized by a line. The displacements of the shell are decomposed into polynomial rows along the coordinate normal to the median surface by the order in which magnitude has higher value than that of classical Kirchhoff-Love type theory. Based on the relations of the three-dimensional theory of elasticity and the Lagrange variational principle, a refined mathematical model of reinforced shells is constructed in the form of equilibrium equations and boundary conditions.

Ключевые слова: подкреплённая оболочка, уравнения трехмерной теории упругости, вариационный принцип Лагранжа, дельта-функция Дирака, уточнённая теория оболочек.

Keywords: reinforced shell, equations of the three-dimensional elasticity theory, Lagrange variational principle, Dirac delta function, refined shell theory.

Введение

Тонкостенные конструкции типа подкреплённых оболочек находят широкое применение во многих отраслях современной техники: машиностроении, строительстве, ракетостроении, самолетостроении. Расчет их напряженно-деформированного состояния (НДС) обычно базируется на классической теории типа Кирхгофа-Лява [1, 2, 3] и Тимошенко-Рейсснера [4, 5, 6], основанной на допущении отсутствия поперечных деформаций и напряжений. Такое допущение приводит к погрешностям при определении НДС оболочек, особенно в зоне его искажения (вблизи соединений и стыков элементов конструкций, а также локального нагружения). Поэтому проблема расчета НДС подкреплённых оболочек, несмотря на достаточно большое число публикаций, остается актуальной.

Для получения более точной картины НДС оболочки необходимо построить более совершенные методы расчета. Один из возможных путей построения математически обоснованной теории пластинок и оболочек состоит в применении метода прямого асимптотического интегрирования [7] уравнений трехмерной теории упругости с последующим применением вариационного метода Власова-Канторовича [8, 9].

Другой подход к построению уточнённой теории оболочек, называемый в [10] энергетически согласованным, заключается в разложении искомым перемещений в полиномиальные ряды по нормальной координате и последующем применении вариационного принципа Лагранжа.

В данной работе применяется подход [10], заключающийся в разложении искомым перемещений оболочки в полиномиальные ряды по нормальной координате на один порядок выше по отношению к классической теории.

**Система координат и соотношения
трехмерной теории упругости**

Подкреплённая цилиндрическая оболочка из изотропного материала рассматривается как система, состоящая из собственно обшивки и жестко с ней соединённых продольных и кольцевых ребер жесткости. Исследование обшивки и ребер, в свою очередь, базируется на общей теории пластин и оболочек.

Цилиндрическая оболочка рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат (ξ, θ, z) (см. рис. 1). Координатные оси ξ , θ совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось z направлена по наружной нормали к этой поверхности.

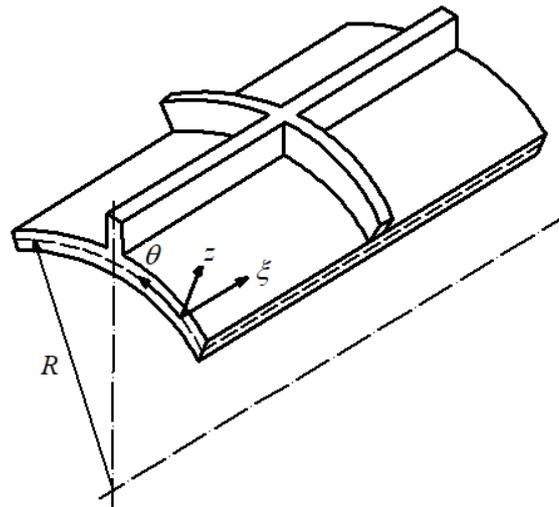


Рис. 1. – Подкрепленная цилиндрическая оболочка в триортогональной криволинейной системе координат

Для описания НДС обшивки и ребер используются уравнения трехмерной теории упругости в триортогональной криволинейной системе координат [7].

Уравнения связи напряжений, деформаций и перемещений

В соответствии с работами [10] перемещения обшивки и ребер представляются в виде

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= \sum_{k=0}^K u_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \\ v(\xi, \theta, z) &= \sum_{k=0}^K v_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \\ w(\xi, \theta, z) &= \sum_{k=0}^{K-1} w_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем предполагать в дальнейшем, что для обшивки искомые перемещения u , v , w допускают асимптотические представления вида (1) при $K=2$.

Компоненты деформации произвольной оболочки в перемещениях определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} v + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} w, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} u + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} w, \\ \gamma_{\xi\theta} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial H_1}{\partial \theta} u + \frac{\partial H_2}{\partial \xi} v \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} u, \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} v, \end{aligned} \quad (2)$$

где H_1 , H_2 - коэффициенты Ламе.

Упругости для изотропного материала имеют вид

Физические уравнения трехмерной теории

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= A_{11} \varepsilon_\xi + A_{12} \varepsilon_\theta + A_{13} \varepsilon_z, \\ \sigma_\theta &= A_{21} \varepsilon_\xi + A_{22} \varepsilon_\theta + A_{23} \varepsilon_z, \\ \sigma_z &= A_{31} \varepsilon_\xi + A_{32} \varepsilon_\theta + A_{33} \varepsilon_z, \\ \tau_{\xi\theta} &= A_{44} \gamma_{\xi\theta}, \tau_{\xi z} = A_{55} \gamma_{\xi z}, \tau_{\theta z} = A_{66} \gamma_{\theta z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты A_{ij} в уравнениях (3) представляют собой упругие постоянные материала оболочки. Они зависят от модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала оболочки.

Подставляя разложения (1) в формулы (2) и (3), с учетом того, что для цилиндрической оболочки коэффициенты Ламе определяются соотношениями $H_1=R, H_2=R(1+rz), r=r_2=1/R$, находим выражения для деформаций и напряжений обшивки в перемещениях.

Полагая, что взаимодействие оболочки с ребрами схематизируется линейным контактом, влияние кольцевых ребер на обшивку может быть рассмотрено через две компоненты перемещений ребер по кольцевому и поперечному направлениям, а продольных ребер – по продольному и поперечному направлениям. Принимая для ребер в

$$\begin{aligned} u^{1i}(\xi, z)|_{z=\lambda_{1i}h} &= u(\xi, \theta_i, z)|_{z=\lambda_{1i}h}, \\ w^{1i}(\xi) &= w(\xi, \theta_i, z)|_{z=\lambda_{1i}h}, \quad i = 1..M, \\ v^{2j}(\theta, z)|_{z=\lambda_{2j}h} &= v(\xi_j, \theta, z)|_{z=\lambda_{2j}h}, \\ w^{2j}(\theta) &= w(\xi_j, \theta, z)|_{z=\lambda_{2j}h}, \quad j = 1..N, \end{aligned} \quad (5)$$

где θ_i, ξ_j – координаты линий сопряжения продольных и кольцевых ребер с обшивкой; $\lambda_{1i}=1, \lambda_{2j}=1$ и $\lambda_{1i}=-1, \lambda_{2j}=-1$ соответственно, при внешнем и внутреннем расположении ребра.

$$\begin{aligned} H_1 &= R_{1i}, \quad H_2 = R_{1i}(1 + r_{1i}z), \\ r_{1i} &= \frac{1}{[R + \lambda_{1i}(h + H_{1i})]}, \\ H_2 &= R_{2j}, \quad H_2 = R_{2j}(1 + r_{2j}z), \\ r_{2j} &= \frac{1}{[R + \lambda_{2j}(h + H_{2j})]}, \end{aligned}$$

где H_{1i}, H_{2j} – высота i -го, j -го продольного и кольцевого ребер, находим выражения для деформаций и напряжений ребер в перемещениях.

Построение системы уравнений равновесия и граничных условий

Уравнения равновесия и естественные граничные условия для подкрепленной цилиндрической оболочки находим на основе вариационного принципа Лагранжа

разложении (1) $K=I$, представим их искомые перемещения

$$\begin{aligned} u^{1i}(\xi, z) &= u_0^{1i}(\xi) + u_1^{1i}(\xi)z, \\ w^{1i}(\xi) &= w_0^{1i}(\xi), \quad i = \overline{1, M}, \\ v^{2j}(\theta, z) &= v_0^{2j}(\theta) + v_1^{2j}(\theta)z, \\ w^{2j}(\theta) &= w_0^{2j}(\theta), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $u^{1i}, w^{1i}, v^{2j}, w^{2j}$ – перемещения i -го продольного и j -го кольцевого ребер соответственно.

На линии контакта между ребрами и обшивкой их компоненты перемещений одинаковы, поэтому условия сочленения ребер и обшивки принимают вид

Из соотношений (2), (4) и (5), с учетом того, что для продольных и кольцевых ребер коэффициенты Ламе определяются соотношениями

$$\delta E = \delta U + \delta \sum_{i=1}^M U^{1i} + \delta \sum_{j=1}^N U^{2j} - \delta A = 0, \quad (6)$$

где U, U^{1i}, U^{2j}, A соответственно потенциальная энергия деформации обшивки, продольных и кольцевых ребер, работа внешних сил; M, N – количество продольных и кольцевых ребер.

Потенциальная энергия упругой деформации обшивки имеет вид

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint (\sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} + \\ &+ \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} + \tau_{\xi \theta} \delta \gamma_{\xi \theta}) (1 + rz) R^2 d\xi d\theta dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения потенциальной энергии i -го продольного и j -го кольцевого ребер представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta U^{1i} &= \int \int \int (\sigma_\xi^{1i} \delta \varepsilon_\xi^{1i} + \sigma_\theta^{1i} \delta \varepsilon_\theta^{1i} + \sigma_z^{1i} \delta \varepsilon_z^{1i} + \tau_{\xi \theta}^{1i} \delta \gamma_{\xi \theta}^{1i}) \\ &+ \tau_{\xi z}^{1i} \delta \gamma_{\xi z}^{1i} + \tau_{\theta z}^{1i} \delta \gamma_{\theta z}^{1i}) (1 + r_{1i}z) R_{1i}^2 d\xi d\theta dz. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta U^{2j} = \int \int \int (\sigma_\xi^{2j} \delta \varepsilon_\xi^{2j} + \sigma_\theta^{2j} \delta \varepsilon_\theta^{2j} + \sigma_z^{2j} \delta \varepsilon_z^{2j} + \tau_{\xi \theta}^{2j} \delta \gamma_{\xi \theta}^{2j} +$$

$$\begin{aligned}
& + \tau_{\xi z}^{2j} \delta \gamma_{\xi z}^{2j} + \tau_{\theta z}^{2j} \delta \gamma_{\theta z}^{2j} \Big) (1 + r_{2j} z) R_{2j}^2 d\xi d\theta dz. \text{ (9) Работа внешних нагрузок, действующих на} \\
& \text{обшивку, принимается в виде } \delta A = \iiint (G_1 \delta u + G_2 \delta v + G_3 \delta w) (1 + rz) R^2 d\xi d\theta dz + \iint \{-q_{13}^+ [(1 + \\
& rz) \delta u]_{z=h} + q_{13}^- [(1 + rz) \delta u]_{z=-h} - q_{23}^+ [(1 + rz) \delta v]_{z=h} + q_{23}^- [(1 + rz) \delta v]_{z=-h} - \\
& - q_{33}^+ [(1 + rz) \delta w]_{z=h} + q_{33}^- [(1 + rz) \delta w]_{z=-h}\} R^2 d\xi d\theta + \\
& + \iint (q_{11} \delta u + q_{12} \delta v + q_{13} \delta w) (1 + rz) \Big|_{\xi=\xi_0^{(1)}}^{\xi=\xi_0^{(2)}} R d\theta dz + \iint (q_{21} \delta u + q_{22} \delta v + q_{23} \delta w) \Big|_{\theta=\theta_0^{(1)}}^{\theta=\theta_0^{(2)}} R d\xi dz, \\
& \text{(10) где } G_1, G_2, G_3 \text{ - объемные силы; } q_{ij} \text{ - поверхностные силы.}
\end{aligned}$$

Подставляя выражения деформаций обшивки в уравнение (7) и выполняя некоторые преобразования, получим потенциальную энергию упругой деформации обшивки

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left[\sum_{t=0}^2 r \left(M_{\xi}^t \frac{\partial}{\partial \xi} + M_{\xi\theta}^1 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \delta u_t + \sum_{t=0}^2 r \left(\tilde{M}_{\xi\theta}^t \frac{\partial}{\partial \xi} + M_{\theta}^1 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \delta v_t + \right. \\
& + \sum_{l=0}^1 r \left(M_{\xi z}^l \frac{\partial}{\partial \xi} + M_{\theta z}^1 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \delta w_l + \sum_{l=0}^1 r \left(\tilde{M}_{\xi z}^l \frac{\partial}{\partial \xi} + M_{\theta z}^1 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \delta w_l + \\
& \left. + \sum_{t=0}^2 M_{\xi z}^t \delta u_t + \sum_{t=0}^2 (\tilde{M}_{\theta z}^t - M_{\theta z}^t r) \delta v_t + M_{\theta}^0 r \delta w_0 + (M_{\theta}^1 r + Q_z) \delta w_1 \right] R^2 d\xi d\theta, \quad (11)
\end{aligned}$$

где $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)}$ – координаты криволинейных и прямолинейных краев оболочки.

Здесь приняты следующие обозначения усилий:

$$\begin{aligned}
Q_z = & \int_{-h}^h \sigma_z (1 + rz) dz, \quad (M_{\xi}^k, \tilde{M}_{\xi\theta}^k) = \int_{-h}^h (\sigma_{\xi}, \tau_{\xi\theta}) (1 + rz) \frac{z^k}{k!} dz, \quad k=0,1,2, \\
(M_{\theta}^k, M_{\xi\theta}^k, M_{\theta z}^k) = & \int_{-h}^h (\sigma_{\theta}, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}) \frac{z^k}{k!} dz, \quad k=0,1,2, \\
(M_{\xi z}^k, \tilde{M}_{\theta z}^k) = & \int_{-h}^h (\tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}) (1 + rz) \frac{z^{k-1}}{k!} dz, \quad k=1, 2, M_{\xi z}^0 = 0, M_{\theta z}^0 = 0, \tilde{M}_{\theta z}^0 = 0. \text{ (12)}
\end{aligned}$$

Подставляя выражения деформаций продольного ребра в уравнение (8) находим потенциальную энергию упругой деформации i -го продольного ребра

$$\begin{aligned}
\delta U^{1i} = & \alpha_i k_{1i} \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \left\{ r_{1i} N_{\xi}^{1i} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta u_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h \delta u_1(\xi, \theta_i) + \frac{h^2}{2} \delta u_2(\xi, \theta_i) \right] - \right. \\
& - r_{1i} \lambda_{1i} h N_{\xi}^{1i} \frac{\partial \delta u_1^{1i}}{\partial \xi} + r_{1i} M_{\xi}^{1i} \frac{\partial \delta u_1^{1i}}{\partial \xi} + r_{1i} N_{\theta}^{1i} [\delta w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h \delta w_1(\xi, \theta_i)] + \\
& \left. + r_{1i} Q_{\xi z}^{1i} \frac{\partial}{\partial \xi} [\delta w_0(\xi, \theta_i) + \lambda_{1i} h \delta w_1(\xi, \theta_i)] + Q_{\xi z}^{1i} \delta u_1^{1i} \right\} R^2 d\xi. \text{ (13)}
\end{aligned}$$

где $\alpha_i = a_i/R$; $k_{1i} = R_{1i}^2/R^2$, a_i – толщина i -го продольного ребра;

$$\begin{aligned}
(N_{\xi}^{1i}, Q_{\xi z}^{1i}) = & \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i} h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{1i})} (\sigma_{\xi}^{1i}, \tau_{\xi z}^{1i}) (1 + r_{1i} z) dz, \\
N_{\theta}^{1i} = & \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i} h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{1i})} \sigma_{\theta}^{1i} dz, \\
M_{\xi}^{1i} = & \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i} h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{1i})} \sigma_{\xi}^{1i} (1 + r_{1i} z) z dz; \text{ (14)}
\end{aligned}$$

Применяя свойства

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a), & x_1 < a < x_2, \\ \frac{f(a)}{2}, & a=x_1 \text{ или } a=x_2 \\ 0, & a < x_1, \quad a > x_2, \end{cases} \text{ и } f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a), \text{ где } \delta(x-a) \text{ - дельта-}$$

функция Дирака, получим выражение для потенциальной энергии упругой деформации i -го продольного ребра

$$\begin{aligned} \delta U^{1i} = & \alpha_i k_{1i} \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ r_{1i} N_{\xi}^{1i} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial \xi} + \lambda_{1i} h \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi} \right) + (-r_{1i} \lambda_{1i} h N_{\xi}^{1i} + r_{1i} M_{\xi}^{1i}) \frac{\partial \delta u_1^{1i}}{\partial \xi} \right. \\ & + r_{1i} N_{\theta}^{1i} (\delta w_0 + \lambda_{1i} h \delta w_1) + \\ & \left. + r_{1i} Q_{\xi z}^{1i} \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial \xi} + \lambda_{1i} h \frac{\partial \delta w_1}{\partial \xi} \right) + Q_{\xi z}^{1i} \delta u_1^{1i} \right\} \delta(\theta - \theta_i) R^2 d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогичным способом находим выражение потенциальной энергии j -го кольцевого ребра в вид

$$\begin{aligned} \delta U^{2j} = & \beta_j k_{2j} \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ r_{2j} N_{\theta}^{2j} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial \delta v_1}{\partial \theta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \delta v_2}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & + r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial \theta} + \lambda_{2j} h \frac{\partial \delta w_1}{\partial \theta} \right) - r_{2j} Q_{\theta z}^{2j} \left(\delta v_0 + \lambda_{2j} h \delta v_1 + \frac{h^2}{2} \delta v_2 \right) + \\ & + r_{2j} N_{\theta}^{2j} (\delta w_0 + \lambda_{2j} h \delta w_1) + (-r_{2j} \lambda_{2j} h N_{\theta}^{2j} + r_{2j} M_{\theta}^{2j}) \frac{\partial \delta v_1^j}{\partial \theta} + \\ & \left. + Q_{\theta z}^{2j} (1 + r_{2j} \lambda_{2j} h) \delta v_1^{2j} \right\} \delta(\xi - \xi_j) R^2 d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\beta_i = b_i/R$; $k_{2j} = R_{2j}^2/R^2$, b_i – толщина j -го кольцевого ребра;

$$(N_{\theta}^{2j}, Q_{\theta z}^{2j}) = \lambda_{2j} \int_{\lambda_{2j} h}^{\lambda_{2j}(h+2H_{2j})} (\sigma_{\theta}^{2j}, \tau_{\theta z}^{2j}) dz, \quad M_{\theta}^{2j} = \lambda_{2j} \int_{\lambda_{2j} h}^{\lambda_{2j}(h+2H_{2j})} \sigma_{\theta}^{2j} z dz; \quad (17)$$

С помощью разложения (1) при $K=2$, перепишем работу внешних сил (10) в виде

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ \sum_{i=0}^2 [(X_{\xi}^i + p_{\xi}^i) \delta u_i + (X_{\theta}^i + p_{\theta}^i) \delta v_i] + \sum_{i=0}^1 (X_z^i + p_z^i) \delta w_i \right\} R^2 d\xi d\theta + \\ & + \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \left(\sum_{t=0}^2 \bar{M}_{\xi}^t \delta u_t + \sum_{t=0}^2 \bar{M}_{\xi\theta}^t \delta v_t + \sum_{l=0}^1 \bar{M}_{\xi z}^1 \delta w_l \right) \Big|_{\xi=\xi_0^{(1)}}^{\xi=\xi_0^{(2)}} R d\theta + \\ & + \int_{\xi_{01}}^{\xi_{02}} \left(\sum_{t=0}^2 \bar{M}_{\theta\xi}^t \delta u_t + \sum_{t=0}^2 \bar{M}_{\theta}^t \delta v_t + \sum_{l=0}^1 \bar{M}_{\theta z}^1 \delta w_l \right) \Big|_{\theta=\theta_0^{(1)}}^{\theta=\theta_0^{(2)}} R d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (X_{\xi}^l, X_{\theta}^l, X_z^l) &= \int_{-h}^h (G_1, G_2, G_3) (1 + rz) \frac{z^l}{l!} dz, \\ p_{\xi}^l &= -q_{13}^+ \left[(1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{13}^- \left[(1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \\ p_{\theta}^l &= -q_{23}^+ \left[(1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{23}^- \left[(1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \quad (19) \\ p_z^l &= -q_{33}^+ \left[(1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{33}^- \left[(1 + rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \\ (\bar{M}_{\xi}^k, \bar{M}_{\xi\theta}^k, \bar{M}_{\xi z}^k) &= \int_{-h}^h (q_{11}, q_{12}, q_{13}) (1 + rz) \frac{z^k}{k!} dz, \quad k = 0, 1, 2, \\ (\bar{M}_{\theta}^k, \bar{M}_{\theta\xi}^k, \bar{M}_{\theta z}^k) &= \int_{-h}^h (q_{22}, q_{21}, q_{23}) \frac{z^k}{k!} dz, \quad k = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя выражение потенциальных энергий (11), (15), (16) и работы (18) в уравнение Лагранжа (6) и интегрируя полученные выражения по частям, преобразуем выражение (6) к виду

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ \sum_{t=0}^2 \left[rM_{\xi}^t - r\bar{M}_{\xi}^t + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} r_{1i} \lambda_{1i}^t h^t}{t!} N_{\xi}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta u_t + \sum_{t=0}^2 r \left(\bar{M}_{\xi\theta}^t - \bar{M}_{\xi\theta}^t \right) \delta v_t + \right. \\
& \quad + \sum_{l=0}^1 \left[rM_{\xi z}^l - r\bar{M}_{\xi z}^l + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \lambda_{1i}^l h^l Q_{\xi z}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta w_l + \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \left(-r_{1i} \lambda_{1i} h N_{\xi}^{1i} + r_{1i} M_{\xi}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) \delta u_1^{1i} \right\} \Bigg|_{\xi=\xi_0^{(1)}}^{\xi=\xi_0^{(2)}} R^2 d\theta + \\
& + \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \left\{ \sum_{t=0}^2 r \left(M_{\xi\theta}^t - \bar{M}_{\xi\theta}^t \right) \delta u_t + \sum_{t=0}^2 \left[rM_{\theta}^t - r\bar{M}_{\theta}^t + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^t h^t}{t!} N_{\theta}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_t + \right. \\
& \quad + \sum_{l=0}^1 \left[rM_{\theta z}^l - r\bar{M}_{\theta z}^l + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^l h^l Q_{\theta z}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta w_l + \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left(-\lambda_{2j} h N_{\theta}^{2j} + M_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \delta v_1^{2j} \right\} \Bigg|_{\theta=\theta_0^{(1)}}^{\theta=\theta_0^{(2)}} R^2 d\xi - \\
& - \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_0^{(2)}} \left\{ \sum_{t=0}^2 \left[r \frac{\partial M_{\xi}^t}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}^t}{\partial \theta} - M_{\xi z}^{t-1} + X_{\xi}^t + p_{\xi}^t + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} r_{1i} \lambda_{1i}^t h^t}{t!} \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) \right] \delta u_t + \right. \\
& + \sum_{t=0}^2 \left[r \frac{\partial \bar{M}_{\xi\theta}^t}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta}^t}{\partial \theta} - \bar{M}_{\theta z}^{t-1} + rM_{\theta z}^t + X_{\theta}^t + p_{\theta}^t + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^t h^t}{t!} \left(\frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) \right] \delta v_t + \\
& + \sum_{l=0}^1 \left[r \frac{\partial M_{\xi z}^l}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta z}^l}{\partial \theta} - rM_{\theta}^l - Q_z^l + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^l h^l \left(\frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) + X_z^l + p_z^l \right] \delta w_l + \\
& - \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \left(r_{1i} \lambda_{1i} h \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} - r_{1i} \frac{\partial M_{\xi}^{1i}}{\xi} + Q_{\xi z}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) \delta u_1^{1i} - \\
& \quad \left. - \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} \left[h r_{2j} \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} - r_{2j} \frac{\partial M_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + (1 + r_{2j} h) Q_{\theta z}^{2j} \right] \delta(\xi - \xi_j) \delta v_1^{2j} \right\} R^2 d\xi d\theta = 0. \quad (20)
\end{aligned}$$

В силу независимости и произвольности вариаций искомым обобщенных перемещений, получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
& r \frac{\partial M_{\xi}^t}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}^t}{\partial \theta} - M_{\xi z}^t + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} r_{1i} \lambda_{1i}^t h^t}{t!} \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) + X_{\xi}^t + p_{\xi}^t = 0, \\
& r \frac{\partial \bar{M}_{\xi\theta}^t}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta}^t}{\partial \theta} - \bar{M}_{\theta z}^t + rM_{\theta z}^t + X_{\theta}^t + p_{\theta}^t + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^t h^t}{t!} \left(\frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi z}^l}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta z}^l}{\partial \theta} - rM_{\theta}^l - Q_z^l + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \lambda_{1i}^l h^l \left(\frac{\partial Q_{\xi z}^{1i}}{\partial \xi} - N_{\theta}^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^l h^l \left(\frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) + X_z^l + p_z^l = 0, \quad t = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1, \quad (21) \\
& r_{1i} \lambda_{1i} h \frac{\partial N_{\xi}^{1i}}{\partial \xi} - r_{1i} \frac{\partial M_{\xi}^{1i}}{\xi} + Q_{\xi z}^{1i} = 0,
\end{aligned}$$

$$r_{2j}\lambda_{2j}h \frac{\partial N_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} - r_{2j} \frac{\partial M_{\theta}^{2j}}{\partial \theta} + (1 + r_{2j}\lambda_{2j}h)Q_{\theta z}^{2j} = 0, \quad i = 1..M, j = 1..N.$$

Граничные условия представляются в следующем виде:

на криволинейных краях $\xi = \xi_0^{(1)}$ и $\xi = \xi_0^{(2)}$:

$$\begin{aligned} u_t &= \overline{u}_t \text{ или } rM_{\xi}^t - r\overline{M}_{\xi}^t + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} \lambda_{1i}^t h^t r_{1i}}{t!} N_{\xi}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \quad t = 0, 1, 2; \\ v_t &= \overline{v}_t \text{ или } \widehat{M}_{\xi\theta}^t - \overline{M}_{\xi\theta}^t = 0, \quad t = 0, 1, 2; \\ w_t &= \overline{w}_t \text{ или } rM_{\xi z}^t - r\overline{M}_{\xi z}^t + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \lambda_{1i}^l h^l Q_{\xi z}^{1i} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \quad l = 0, 1, \\ u_1^{1i} &= \overline{u}_1^{1i} \text{ или } -\lambda_{1i} h N_{\xi}^{1i} + M_{\xi}^{1i} = 0; \end{aligned} \tag{22}$$

на прямолинейных краях $\theta = \theta_0^{(1)}$ и $\theta = \theta_0^{(2)}$:

$$\begin{aligned} u_t &= \overline{u}_t \text{ или } M_{\xi\theta}^t - \overline{M}_{\xi\theta}^t = 0, \quad t = 0, 1, 2; \\ v_t &= \overline{v}_t \text{ или } rM_{\theta}^t - r\overline{M}_{\theta}^t + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^t h^t}{t!} N_{\theta}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) = 0, \quad t = 0, 1, 2; \\ w_t &= \overline{w}_t \text{ или } rM_{\theta z}^t - r\overline{M}_{\theta z}^t + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j}^l h^l Q_{\theta z}^{2j} \delta(\xi - \xi_j) = 0, \quad l = 0, 1, \tag{23} \\ v_1^{2j} &= \overline{v}_1^{2j} \text{ или } -\lambda_{2j} h N_{\theta}^{2j} + M_{\theta}^{2j} = 0, \end{aligned}$$

где $\overline{u}_k, \overline{v}_k, \overline{w}_l, \overline{u}_1^{1i}, \overline{v}_1^{2j}, k=0..2, l=0..1, i=1..M, j=1..N$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

Краевые условия (22), (23) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления оболочки, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (21) уточненной теории.

В случае, если оболочка является частично или полностью замкнутой, краевые условия по направлению замкнутых координат заменяются условиями периодичности, обеспечивающими однозначность перемещений в любой точке замкнутой линии координат.

Для получения системы уравнений равновесия в перемещениях, подставим выражения усилий (12), (14), (17), (19) в уравнения равновесия (21). Полученная система является дифференциальными уравнениями в частных производных порядка $2(8+M+N)$ относительно $(8+M+N)$ обобщенных перемещений $u_k, v_k, w_l, u_1^{1i}, v_1^{2j}$.

Выводы

На основе разложения компонентов перемещений в полиномиальные ряды по толщине на один порядок выше по отношению к классической теории построен вариант уточненной математической модели подкрепленных цилиндрических оболочек. С позиции трехмерной задачи теории упругости с помощью вариационного принципа Лагранжа построены двумерные уравнение равновесия и граничные условия. Полученная уточненная математическая модель позволяет учесть поперечные нормальные

напряжения, которыми в классической теории пренебрегают.

Список литературы

1. Дудченко А.А., Сергеев В.Н. Нелинейные уравнения равновесия конической оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 78–98.
2. Кушнаренко И.В. Учёт подкреплений при расчёте оболочек вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 2. С. 57-62.
3. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Том 2. Теория ребристых оболочек. Киев: Наукова Думка, 1980. 368 с.
4. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч.1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 276 с.
5. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 49-63.
6. Swaddiwudhipohg S., Tian J., Wang C.M. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via Ritz method. Thin walled structures. 1999. Vol. 35. P. 1-24.

7. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

8. Firsanov Val. V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. Vol. 45, no. 6. P. 515–521.

9. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н., Хиеу Л.Ч. Уточненная теория расчета напряженно-

деформированного состояния цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник МАИ. Изд-во МАИ (НИУ). ISSN: 0869-6101. 2013. № 4. С. 198-211.

10. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139-146.

УДК 504; 519.2; 633.1

ИНВАРИАНТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

*Шарый П.А.^{*1,2}, Шарая Л.С.²*

¹ *Институт физико-химических и биологических проблем почвоведения, Пушкино, Московская область, Россия*

² *Всероссийский научно-исследовательский институт агрохимии им. Д.Н. Прянишникова, Москва, Россия*

INVARIANTS AND THEIR APPLICATIONS

Shary P.A.^{1,2}, Sharaya L.S.²

¹ *Institute of Physicochemical and Biological Problems in Soil Science, Pushchino, Russia*

² *Pryanishnikov's All-Russian Institute of Agrochemistry, Moscow, Russia*

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2023.1.105.1767

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены измеряемые в точках наблюдения величины X и Y , для линейной функции которых, такой как $Z = X + aY$, где a – числовой параметр, показана зависимость коэффициента вариации $CV(a)$ величины Z от a . Величина Z здесь характеризуется как стабильное сочетание или инвариант. X и Y могут быть связаны друг с другом отрицательно (антагонисты) или положительно (спутники). Показано, что для антагонистов линейный инвариант есть $Z = X + aY$, а для спутников $Z = X + a(2Y_{AV} - Y)$, где Y_{AV} есть среднее Y . Доказаны существование и единственность минимума $CV(a)$, выведены явные формулы для a и для $CV(a)$. Стабильное сочетание может не быть идеальным инвариантом, для которого $CV(a) = 0$. Именно такие часто встречаются в почвоведении, экологии и других дисциплинах. Для описания отклонения инварианта от идеального введен коэффициент эффективности $Keff$, позволяющий сравнивать инварианты путем построения ряда стабильностей для изучаемых пар величин. Это дает возможность эмпирически выявлять пары величин с наибольшими $Keff$. Дано обобщение введенного метода наименьшей вариабельности для многих переменных. Приведены примеры использования этого метода.

ABSTRACT

Variables X and Y measured at observation points are considered, for a linear function of which, such as $Z = X + aY$, where a is a numerical parameter, and the dependence of the coefficient of variation $CV(a)$ of Z on a is shown. Z is characterized as a stable combination or invariant. X and Y can be related to each other negatively (antagonists) or positively (satellites). It is shown that for antagonists the invariant is $Z = X + aY$, and for satellites $Z = X + a(2Y_{AV} - Y)$, where Y_{AV} is the average of Y . The existence and uniqueness of the minimum of $CV(a)$ are proved, and explicit formulas are derived for a and $CV(a)$. A stable combination may not be an ideal invariant for which $CV(a) = 0$. Such ones are often found in soil science, ecology and other disciplines. To describe deviations of stable combinations from an ideal invariant, the efficiency coefficient $Keff$ is introduced that allows comparisons of invariants by constructing a series of stabilities for the studied pairs of quantities. This makes it possible to empirically identify pairs of quantities with the largest $Keff$. A generalization of the introduced method of least variability for many variables is given. Examples of the use of this method are given.

Ключевые слова: стабильное сочетание, инвариант, коэффициент вариации, коэффициент эффективности, метод наименьшей вариабельности

Keywords: stable combination, invariant, coefficient of variation, efficiency coefficient, method of least variability

1. ВВЕДЕНИЕ

В.В. Докучаев [3] писал, что «...высшую цель истинной науки составляет... постижение неизменяющегося среди переменного и вечного – между временным, соединенное с предсказанием долженствующего быть...», то есть, выражаясь

современным языком, высшая цель – поиск инвариантов или стабильных сочетаний в пространстве и/или во времени. Такие инварианты имеют в общем случае вид некоторой функции $g(X, Y, Z, \dots) = \text{const}$ от показателей (например, свойств почв) X, Y, Z, \dots , не меняющейся или

наименьшим образом меняющейся в пространстве и/или во времени. Важность инвариантов или стабильных сочетаний хорошо известна в механике в связи с законами сохранения энергии, импульса и момента количества движения [1], в термодинамике квазистатических процессов [4], они изучаются в биохимии [15] и неравновесной термодинамике [7], в задачах электромагнетизма [8] и технических приложениях [6], в почвоведении [10], агрохимии [11] и других областях естествознания.

Иногда под инвариантами понимают величины, остающиеся неизменными при том или ином преобразовании [9]; например, полная гауссова кривизна не меняется при любом изгибании поверхности, не меняющем длины

кривых на ней [2, 5]. Это последнее понимание инвариантов здесь не рассматривается.

Нередко равенство $g(X, Y, Z, \dots) = \text{const}$ выполняется лишь приближенно, например, при наличии трения в механике. В таких случаях можно говорить о стабильных сочетаниях (квазиинвариантах) и характеризовать их отклонение от идеальности определенным показателем.

В простейшем случае функция $g(X, Y)$ может иметь вид $X+aY$, где a есть некоторое число. Рассматривая коэффициент вариации величины $X+aY$ как функцию параметра a , можно заметить, что он имеет минимум при некотором значении a [10], рис. 1.

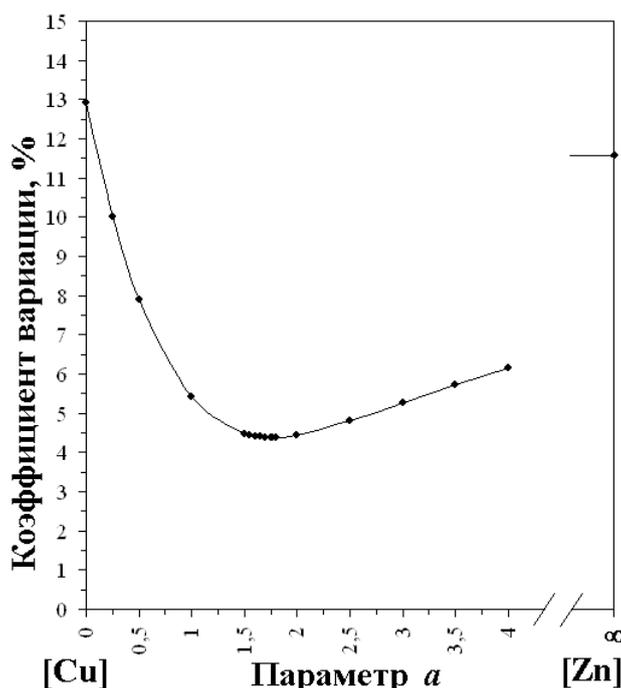


Рис. 1. Зависимость коэффициента вариации сочетания $[Cu]+a[Zn]$ от параметра a . Здесь $[Cu]$ и $[Zn]$ есть концентрации меди и цинка в слое почвы 0–20 см.

В этом примере Cu и Zn являются антагонистами [14], то есть связь между их концентрациями отрицательна. Мы будем называть показатели X и Y спутниками, если связь между ними положительна. Сочетание антагонистов $[Cu]+a[Zn]$, отвечающее минимуму коэффициента вариации $CV(a)$, то есть доставляющий минимум параметр a , можно найти графически (рис. 1). Однако это требует подробных измерений концентраций меди и цинка вблизи минимума и

оставляет неясной общность явления, то есть условия существования и единственности минимума $CV(a)$.

Тем не менее, пример рис. 1 показывает, что для пары антагонистов стабильное сочетание, или для краткости инвариант, отвечающий минимуму $CV(a)$, можно искать в виде суммы $X+aY$, где было бы удобно вывести явную формулу для отвечающего минимуму $CV(a)$ параметра a , такую как

$$a = \frac{\bar{Y} + A|r|\bar{X}}{A(A\bar{X} + |r|\bar{Y})} \left(A = \frac{SD_Y}{SD_X} \right), (1.1)$$

где \bar{X} и \bar{Y} есть средние значения X и Y , r есть коэффициент корреляции Пирсона между X и Y , а SD_X и SD_Y – стандартные отклонения X и Y . Эта формула применялась нами ранее [10, 11], однако ее вывод и условия применимости не были опубликованы. Как показано ниже (теоремы 1 и 2), эта формула справедлива как для антагонистов, так

и для спутников, позволяя легко найти искомым инвариант без применения специальных программ.

Рассматриваемые нами стабильные сочетания обычно не являются в полной мере инвариантами, для которых было бы $CV = 0$. Такова ситуация, например, в теоретической механике [1], где при отсутствии трения полная энергия является инвариантом. Однако в экспериментальных

данных, даже в механике макроскопических (то есть с диссипацией энергии) систем, $CV > 0$. Использование квазиинвариантов открывает путь к эмпирическому нахождению таких стабильных

сочетаний, которые относительно мало меняются при изменении внешних условий.

Для описания отклонения стабильного сочетания от идеальности естественно ввести коэффициент эффективности $Keff$, такой как

$$Keff = \frac{\min\{CV(X), CV(Y)\}}{CV(a)}, (1.2)$$

где $CV(a)$ есть коэффициент вариации сочетания $X+aY$ при значении параметра a , заданном формулой (1.1).

В данной работе мы описываем **метод наименьшей вариабельности**, основанный на этих формулах и их обобщении. Этот метод позволяет находить стабильные сочетания с помощью простых формул.

Целью настоящей работы является вывод формулы (1.1) формулы для $CV(a)$, условий их применимости, изучение свойств $Keff$, а также обобщение на случай многих переменных. Мы

также обсуждаем ограничения подхода и демонстрируем его применение на нескольких примерах.

2. ПАРА АНТАГОНИСТОВ

Вначале выведем формулу (1.1) и определим условия ее применимости для случая пары антагонистов. Пусть имеются две переменные, X и Y , для каждой из которых известны результаты измерения их значений, X_i и Y_i , $i = 1, \dots, N$, в $N > 3$ точках наблюдения с положительными значениями стандартных отклонений SD_X , SD_Y и средних \bar{X} и \bar{Y} ,

$$SD_X, SD_Y > 0, (2.1)$$

$$\bar{X}, \bar{Y} > 0. (2.2)$$

Среднее, стандартное отклонение и коэффициент корреляции Пирсона r между X_i и Y_i есть

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

$$SD_X = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}, (2.3)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{SD_X SD_Y}$$

(множитель $1/(N-1)$ в выражении для r ясен из того, что при совпадении X и Y должно быть $r = 1$). Определим для удовлетворяющих (2.1) и (2.2) данных коэффициент вариации CV (в процентах) как

$$CV(X) = 100 \frac{SD_X}{\bar{X}}. (2.4)$$

При отрицательной связи между X_i и Y_i их линейная комбинация $X + aY$ (2.5)

с некоторым параметром a может рассматриваться как инвариант для антагонистов X и Y , для которого $CV(X+aY)$ будет меньше, чем $\min\{CV(X), CV(Y)\}$.

Коэффициент вариации для сочетания (2.5) есть

$$\begin{aligned} CV(a) &= 100 \frac{SD_{X+aY}}{\bar{X} + a\bar{Y}} = \frac{100 \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - aY_i - \bar{X} - a\bar{Y})^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} \\ &= \frac{100 \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [X_i - \bar{X} + a(Y_i - \bar{Y})]^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} \\ &= \frac{100 \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 + \frac{2a}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) + \frac{a^2}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} \\ &= \frac{100 \sqrt{SD_X^2 + \frac{2a}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) + a^2 SD_Y^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} \end{aligned}$$

$$= \frac{100 \sqrt{SD_{\bar{X}}^2 + 2aSD_XSD_Y \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) + a^2SD_{\bar{Y}}^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}}$$

$$= \frac{100 \sqrt{SD_{\bar{X}}^2 + 2aSD_XSD_Y r + a^2SD_{\bar{Y}}^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} = \frac{100SD_X \sqrt{1 + 2a \frac{SD_Y}{SD_X} r + a^2 \frac{SD_{\bar{Y}}^2}{SD_{\bar{X}}^2}}}{\bar{X} + a\bar{Y}}. (2.6)$$

Вводя обозначение $A = SD_Y/SD_X$, получаем

$$CV(a) = \frac{100SD_X \sqrt{1 + 2aAr + a^2A^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} \left(A = \frac{SD_Y}{SD_X} \right). (2.7)$$

Отсюда видно, что коэффициент вариации $CV(a)$ определен при $a \neq -\bar{X}/\bar{Y}$; выражение под корнем неотрицательно, как показано ниже. Предположим дополнительно (для антагонистов), что

$$-1 < r \leq 0. (2.8)$$

В силу условия (2.1) $A > 0$, и выражение под корнем можно записать как

$$A^2 \left(a^2 + 2a \frac{r}{A} + \frac{1}{A^2} \right). (2.9)$$

Дискриминант многочлена по a в скобках этого выражения есть

$$D = \frac{r^2}{A^2} - \frac{1}{A^2} = \frac{r^2 - 1}{A^2}, (2.10)$$

и при выполнении условий (2.1) и (2.8) он отрицателен, то есть выражение под корнем в (2.7) положительно при любых a ,

$$1 + 2aAr + a^2A^2 = (1 - aA)^2 + 2aA(1 + r) > 0. (2.11)$$

Рассмотрим условия минимальности $CV(a)$. Производная dCV/da есть

$$\frac{dCV}{da} = \frac{(2Ar + 2aA^2)(\bar{X} + a\bar{Y}) - \bar{Y} \sqrt{1 + 2aAr + a^2A^2}}{2\sqrt{1 + 2aAr + a^2A^2} (\bar{X} + a\bar{Y})}$$

$$= 100SD_X \frac{(Ar\bar{X} - \bar{Y}) + aA(A\bar{X} - r\bar{Y})}{\bar{X} + a\bar{Y}}. (2.12)$$

При выполнении условий (2.1), (2.2) и (2.8) знаменатель при $a \neq -\bar{X}/\bar{Y}$ отличен от нуля. Приравнивая в последнем выражении числитель к нулю, находим, что решение уравнения $dCV/da = 0$ выражается через средние, стандартные отклонения и коэффициент корреляции как

$$a = \frac{\bar{Y} - Ar\bar{X}}{A(A\bar{X} - r\bar{Y})} = \frac{\bar{Y} + A|r|\bar{X}}{A(A\bar{X} + |r|\bar{Y})} \left(A = \frac{SD_Y}{SD_X} \right). (2.13)$$

Отсюда, в силу положительности стандартных отклонений (2.1) и средних (2.2), а также неравенств (2.8) для r следует, что

$$a > 0. (2.14)$$

При $r = -1$ имеем $a = 1/A$, и знаменатель dCV/da обращается в ноль, так что в этом случае для dCV/da возникает неопределенность типа 0/0.

Этим доказаны *существование и единственность* экстремума $CV(a)$, а также положительность корня a при выполнении условий (2.1), (2.2) и (2.8).

Рассмотрим теперь вопрос об условиях того, чтобы экстремум $CV(a)$ был строгим минимумом. Для этого необходимо и достаточно выполнение неравенства $d^2 CV / d a^2 > 0$. Дифференцируя последнее выражение в (2.12) по a , находим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 CV}{da^2 X} \frac{d}{da} \left\{ \frac{(Ar\bar{X} - \bar{Y}) + aA(A\bar{X} - r\bar{Y})}{(\bar{X} + a\bar{Y})\sqrt{1 + 2aAr + a^2 A^2}} \right\} \\ & = 100SD_X \frac{B}{(\bar{X} + a\bar{Y})^2(1 + 2aAr + a^2 A^2)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где числитель B есть

$$\begin{aligned} B & = A(A\bar{X} - r\bar{Y})(\bar{X} + a\bar{Y})\sqrt{1 + 2aAr + a^2 A^2} \\ & - \left[\bar{Y}\sqrt{1 + 2aAr + a^2 A^2} + \frac{A(\bar{X} + a\bar{Y})(r + aA)}{\sqrt{1 + 2aAr + a^2 A^2}} \right] \cdot [(Ar\bar{X} - \bar{Y}) + aA(A\bar{X} - r\bar{Y})] \\ & = \frac{A(A\bar{X} - r\bar{Y})(\bar{X} + a\bar{Y})(1 + 2aAr + a^2 A^2)}{\sqrt{1 + 2aAr + a^2 A^2}} \\ & - \frac{[\bar{Y}(1 + 2aAr + a^2 A^2) + A(\bar{X} + a\bar{Y})(r + aA)] \cdot [(Ar\bar{X} - \bar{Y}) + aA(A\bar{X} - r\bar{Y})]}{\sqrt{1 + 2aAr + a^2 A^2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теперь

$$\frac{d^2 CV}{da^2 X} \frac{C}{(\bar{X} + a\bar{Y})^2(1 + 2aAr + a^2 A^2)^{3/2}}, \quad (2.17)$$

где числитель C есть

$$\begin{aligned} C & = A(A\bar{X} - r\bar{Y})(\bar{X} + a\bar{Y})(1 + 2aAr + a^2 A^2) \\ & - [\bar{Y}(1 + 2aAr + a^2 A^2) + A(\bar{X} + a\bar{Y})(r + aA)] \cdot [(Ar\bar{X} - \bar{Y}) + aA(A\bar{X} - r\bar{Y})]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставляя в последнюю квадратную скобку выражение (2.13) для корня a , находим

$$[(Ar\bar{X} - \bar{Y}) + aA(A\bar{X} - r\bar{Y})] = Ar\bar{X} - \bar{Y} + \bar{Y} - Ar\bar{X} = 0, \quad (2.19)$$

так что

$$\frac{d^2 CV}{da^2 X} \frac{A(A\bar{X} - r\bar{Y})(\bar{X} + a\bar{Y})(1 + 2aAr + a^2 A^2)}{(\bar{X} + a\bar{Y})^2(1 + 2aAr + a^2 A^2)^{3/2}} \quad (2.20)$$

при выполнении условий (2.1), (2.2) и (2.8), поскольку в силу (2.11) $1 + 2aAr + a^2 A^2 > 0$, в силу (2.14) $a > 0$, то есть и числитель, и знаменатель (2.20) при $a = (\bar{Y} - Ar\bar{X})/[A(A\bar{X} - r\bar{Y})]$ положительны.

Таким образом, при выполнении условий (2.1), (2.2) и (2.8) **доказано, что экстремум $CV(a)$ для корня a есть строгий минимум.** Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть X_i и Y_i , $i = 1, \dots, N$, где $N > 3$, есть два набора данных, SD_X и SD_Y есть их стандартные отклонения, \bar{X} и \bar{Y} есть их средние значения, и r есть коэффициент корреляции Пирсона между ними. Тогда при условиях $SD_X, SD_Y > 0$, $\bar{X}, \bar{Y} > 0$ и $-1 < r \leq 0$ для линейной комбинации (антагонистов) $X + aY$ коэффициент вариации $CV(a)$ как функция параметра a имеет единственный экстремум, этот экстремум достигается при положительном параметре

$$a = \frac{\bar{Y} - Ar\bar{X}}{A(A\bar{X} - r\bar{Y})} = \frac{\bar{Y} + A|r|\bar{X}}{A(\bar{X} + |r|\bar{Y})} \left(A = \frac{SD_Y}{SD_X} \right),$$

причем этот экстремум является строгим минимумом. Значение $CV(a)$ в точке минимума можно рассчитать по формуле

$$CV(a) = \frac{100SD_X \sqrt{1 + 2aAr + a^2 A^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} = \frac{100SD_X \sqrt{1 - 2aA|r| + a^2 A^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}}.$$

Доказательство приведено выше.

Существование и единственность экстремума в виде строгого минимума для $CV(a)$ означают, что $CV(X+aY)$ в точке минимума меньше, чем $\min\{CV(X), CV(Y)\}$. Другими словами, коэффициент эффективности

$$K_{eff} = \frac{\min\{CV(X), CV(Y)\}}{CV(X+aY)} \quad (2.21)$$

больше единицы.

3. ПАРА СПУТНИКОВ

Пусть имеются две переменные, X и Y , для каждой из которых известны результаты измерения их значений, X_i и Y_i , $i = 1, \dots, N$, в $N > 3$ точках наблюдения с положительными значениями стандартных отклонений SD_X , SD_Y и средних \bar{X} и \bar{Y} ,

$$SD_X, SD_Y > 0, \quad (3.1)$$

$$\bar{X}, \bar{Y} > 0. \quad (3.2)$$

Пусть также связь между X_i и Y_i неотрицательна, а точнее, выполняется условие для спутников

$$0 \leq r < 1. \quad (3.3)$$

Мы хотим найти условия, при которых коэффициент вариации CV для некоторой зависящей от одного параметра линейной комбинации спутников X и Y становится меньше, чем $\min\{CV(X), CV(Y)\}$. Однако если взять линейную комбинацию вида

$$X - bY, \quad (3.4)$$

то ее среднее значение $\bar{X} - b\bar{Y}$ при $b > 0$ может стать отрицательным, и тогда, в силу положительности стандартного отклонения $X - bY$, станет отрицательным и коэффициент вариации $CV(X - bY)$. Поэтому следует произвести замену переменных, при которой коэффициент вариации некоторой линейной комбинации спутников X и Y сохранит свой прежний смысл как неотрицательной характеристики относительного разброса в X , Y и их надлежащим образом выбранной линейной комбинации. Эта замена переменных должна быть линейной и иметь вид (X не меняем)

$$X = X, \quad (3.5)$$

$$Z = \alpha Y + \beta E, \quad (3.6)$$

где E есть единичная величина ($E_i = 1$, $i = 1, \dots, N$). Для нахождения α и β нужны два условия. Поскольку для X среднее значение не изменено, можно потребовать того же и от Z , то есть $\bar{Z} = \bar{Y}$ или $\alpha\bar{Y} + \beta = \bar{Y}$, откуда $\beta = (1 - \alpha)\bar{Y}$. Поскольку для X стандартное отклонение не изменено, того же можно потребовать от Z , то есть $SD_{\alpha Y + \beta E} = SD_Y$ или $SD_{\alpha Y} = SD_Y$, откуда $\alpha = \pm 1$. Выбор $\alpha = 1$ привел бы к тривиальному результату $Z = Y$, а выбор $\alpha = -1$ дает нетривиальный результат $Z = 2\bar{Y}E - Y$. При этом $\bar{Z} = \bar{Y}$ и $SD_Z = SD_Y$. Кроме того, при этом преобразовании коэффициент корреляции $r_{XZ} = -r$ и мы получаем, что преобразование

$$Z = 2\bar{Y}E - Y \quad (3.7)$$

приводит к стабильному сочетанию для спутников X и Y в виде линейной комбинации

$$X + a(2\bar{Y}E - Y), \quad (3.8)$$

для которой

$$\bar{Z} = \bar{Y}, \quad (3.9)$$

$$SD_Z = SD_Y, \quad (3.10)$$

$$r_{XZ} = -r. \quad (3.11)$$

Таким образом, в новых переменных спутники X и Y заменены на «антагонистов» X и Z , причем для последних условия (3.1), (3.2) и (3.3) есть условия теоремы 1, а потому формулу этой теоремы можно записать как

$$a = \frac{\bar{Y} + A|r|\bar{X}}{A(A\bar{X} + |r|\bar{Y})} \left(A = \frac{SD_Y}{SD_X} \right), \quad (3.12)$$

а выражение для коэффициента вариации запишется как

$$CV(a) = \frac{100SD_X \sqrt{1-2aA|r|+a^2A^2}}{\bar{X}+a\bar{Y}}, (3.13)$$

причем формулы (3.12) и (3.13) можно использовать как для антагонистов, так и для спутников. Однако для антагонистов стабильное сочетание есть $X + aY$, а для спутников $X + a(2\bar{Y}E - Y)$.

Таким образом, задача о спутниках сводится к задаче об антагонистах и доказано, что при выполнении условий (3.1), (3.2) и (3.3) значения $CV(a)$ можно рассчитать по формулам (3.12) и (3.13).

Непосредственно для спутников справедлива следующая

Теорема 2. Пусть X_i и Y_i , $i = 1, \dots, N$, где $N > 3$, есть два набора данных, SD_X и SD_Y есть их стандартные отклонения, \bar{X} и \bar{Y} есть их средние значения и r есть коэффициент корреляции Пирсона между ними. Тогда при условиях $SD_X, SD_Y > 0$, $\bar{X}, \bar{Y} > 0$ и $0 \leq r < 1$ для линейной комбинации (спутников X и Y) $X + a(2\bar{Y}E - Y)$, где E есть единичный вектор ($E_i = 1, i = 1, \dots, N$), коэффициент вариации $CV(a)$ как функция параметра a имеет единственный экстремум, этот экстремум достигается при положительном параметре

$$a = \frac{\bar{Y} + Ar\bar{X}}{A(\bar{X} + r\bar{Y})} = \frac{\bar{Y} + A|r|\bar{X}}{A(\bar{X} + |r|\bar{Y})} \left(A = \frac{SD_Y}{SD_X} \right),$$

и этот экстремум является строгим минимумом. Значение $CV(a)$ при этом можно рассчитать по формуле

$$CV(a) = \frac{100SD_X \sqrt{1-2aAr+a^2A^2}}{\bar{X}+a\bar{Y}} = \frac{100SD_X \sqrt{1-2aA|r|+a^2A^2}}{\bar{X}+a\bar{Y}}.$$

Доказательство приведено выше.

Существование и единственность экстремума в виде строгого минимума для $CV(a)$ означают, что $CV(X - aY + 2a\bar{Y}E)$ в точке минимума меньше, чем $\min\{CV(X), CV(Y)\}$, то есть $Keff > 1$.

Отметим, что при $r = 0$ теоремы 1 и 2 дают два разных стабильных сочетания, $P = X + aY$ и $Q = X - aY + 2a\bar{Y}E$ соответственно, но с одинаковыми значениями a , $\bar{P} = \bar{Q}$, $SD_P = SD_Q$ и $CV(P) = 100SD_P/\bar{P} = CV(Q) = 100SD_Q/\bar{Q}$ для обоих.

4. НУЛЕВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ В ПАРНОМ СОЧЕТАНИИ

Как установлено выше (теорема 1), параметр

$$a = \frac{\bar{Y} + A|r|\bar{X}}{A(\bar{X} + |r|\bar{Y})} \left(A = \frac{SD_Y}{SD_X} \right) (4.1)$$

в парном сочетании $X+aY$ для антагонистов отвечает строгому минимуму коэффициента вариации $CV(a)$ этого сочетания как функции a , причем $a > 0$. Условия, при которых это справедливо, есть

$$SD_X, SD_Y, \bar{X}, \bar{Y} > 0, (4.2)$$

$$-1 < r \leq 0. (4.3)$$

В этом разделе рассмотрим частный случай нулевой корреляции, $r = 0$, то есть независимых переменных X и Y . При $r = 0$ формула (4.1) принимает вид

$$a = \frac{\bar{Y}}{A^2\bar{X}}. (4.4)$$

Для сопоставимости рассмотрим вместо X и Y безразмерные переменные

$$\begin{cases} U = X/\bar{X} \\ V = Y/\bar{Y} \end{cases} (4.5)$$

Ясно, что

$$\bar{U} = \bar{V} = 1, (4.6)$$

$$SD_U = \frac{SD_X}{\bar{X}} = \frac{CV(X)}{100}, (4.7)$$

$$SD_V = \frac{SD_Y}{\bar{Y}} = \frac{CV(Y)}{100}, (4.8)$$

$$r_{UV} = r_{XY}. (4.9)$$

При этом

$$\begin{cases} CV(U) = 100 \frac{SD_U}{\bar{U}} = CV(X) \\ CV(V) = 100 \frac{SD_V}{\bar{V}} = CV(Y) \end{cases} (4.10)$$

то есть коэффициенты вариации старых и новых переменных совпадают. Для новых переменных параметр a' при $r = 0$ есть

$$a' = \frac{1}{B^2} \left(B = \frac{SD_V}{SD_U} = \frac{CV(V)}{CV(U)} = \frac{CV(Y)}{CV(X)} \right). (4.11)$$

Используя формулу (3.12) не для X и Y , а для U и V , получаем при $r = 0$

$$CV(U + a'V) = CV(U) \frac{\sqrt{1+a'^2 B^2}}{1+a'}. (4.12)$$

Подставляя сюда значение a' из (4.11), находим в точке минимума

$$CV(a') = CV(U) \frac{\sqrt{1+\frac{1}{B^2}}}{1+\frac{1}{B^2}} = CV(U) \frac{B}{\sqrt{1+B^2}}, (4.13)$$

или, поскольку из (4.11) следует

$$CV(U) = \frac{CV(V)}{B}, (4.14)$$

то

$$CV(a') = CV(U) \frac{B}{\sqrt{1+B^2}} = CV(V) \frac{1}{\sqrt{1+B^2}}. (4.15)$$

Коэффициент эффективности K_{eff} , по определению равный

$$K_{eff} = \frac{\min\{CV(U), CV(V)\}}{CV(a')}, (4.16)$$

есть

$$K_{eff} = \sqrt{1+B^2} \text{ при } \frac{CV(V)}{CV(U)} = B \leq 1, (4.17)$$

$$K_{eff} = \frac{\sqrt{1+B^2}}{B} \text{ при } \frac{CV(V)}{CV(U)} = B \geq 1. (4.18)$$

Отсюда следует, что $K_{eff} > 1$ при любом положительном B ; при $B \ll 1$ он становится близок к единице; при $B = 1$ он максимален и равен $\sqrt{2}$, при $B \gg 1$ опять становится близок к единице.

Этот результат интересен тем, что коэффициент эффективности K_{eff} в случае $r = 0$ существенно больше единицы (равен $\sqrt{2} \approx 1.4142$) даже для круглого облака точек при $B = 1$. Для вытянутого облака точек он становится меньше чем $\sqrt{2}$, причем тем меньше, чем сильнее вытянуто облако по оси U или по оси V .

Хотя функция $K_{eff}(B)$ в (4.17) и (4.18) непрерывна по B , но ее первая производная по B терпит разрыв в точке $B = 1$. Действительно,

$$\frac{dK_{eff}}{dB} \frac{d\sqrt{1+B^2}}{dB} \frac{B}{\sqrt{1+B^2}} \text{ при } B < 1, (4.19)$$

$$\frac{dK_{eff}}{dB} \frac{d\sqrt{1+B^2}}{dB} \frac{-1}{B^2\sqrt{1+B^2}} \text{ при } B > 1, (4.20)$$

и при $B = 1$ производная слева есть $1/\sqrt{2}$, а производная справа есть $-1/\sqrt{2}$. Рассмотрим также случай $r = 0$ в исходных переменных X и Y . В этом случае

$$CV(X + aY) = 100SD_X \frac{\sqrt{1+a^2 A^2}}{\bar{X} + a\bar{Y}} \text{ при } a \neq -\bar{X}/\bar{Y}. (4.21)$$

Отметим, что

$$CV(Y) = 100 \frac{SD_Y}{\bar{Y}} = 100 \frac{SD_X A}{\bar{Y}} = 100 \frac{SD_X A \bar{X}}{\bar{X} \bar{Y}} = CV(X) \frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}, (4.22)$$

и также

$$\frac{CV(Y)}{CV(X)} = \frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}. (4.23)$$

Подставляя в (4.21) $a = \bar{Y}/(A^2 \bar{X})$ из (4.4), находим:

$$\begin{aligned} CV(a) &= \frac{100 SD_X \sqrt{1 + \frac{\bar{Y}^2}{A^2 \bar{X}^2}}}{\bar{X} + \frac{\bar{Y}^2}{A^2 \bar{X}}} = \frac{100 SD_X A \sqrt{\bar{Y}^2 + A^2 \bar{X}^2}}{\bar{Y}^2 + A^2 \bar{X}^2} = \frac{100 SD_X A}{\sqrt{\bar{Y}^2 + A^2 \bar{X}^2}} \\ &= CV(X) \frac{A \bar{X}}{\sqrt{\bar{Y}^2 + A^2 \bar{X}^2}} = CV(X) \frac{\left(\frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}\right)^2}} = \frac{CV(Y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}\right)^2}}, (4.24) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве использован результат (4.22). Коэффициент эффективности K_{eff} , по определению равный

$$K_{eff} = \frac{\min\{CV(X), CV(Y)\}}{CV(a)}, (4.25)$$

есть

$$K_{eff} = \sqrt{1 + \left(\frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}\right)^2} \text{ при } \frac{CV(Y)}{CV(X)} = \frac{A \bar{X}}{\bar{Y}} \leq 1, (4.26)$$

$$K_{eff} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}\right)^2}}{\left(\frac{A \bar{X}}{\bar{Y}}\right)} \text{ при } \frac{CV(Y)}{CV(X)} = \frac{A \bar{X}}{\bar{Y}} \geq 1. (4.27)$$

Поскольку формулы (4.26) и (4.27) эквивалентны (4.19) и (4.20) при замене B на $A \bar{X}/\bar{Y}$, то $K_{eff} > 1$ при любом положительном $A \bar{X}/\bar{Y}$; при $A \bar{X}/\bar{Y} \ll 1$ он становится близок к единице; при $A \bar{X}/\bar{Y} = 1$ он максимален и равен $\sqrt{2} = 1.4142$, при $A \bar{X}/\bar{Y} \gg 1$ опять становится близок к единице. Если $CV(X)$ отлично от $CV(Y)$ в два раза (все равно, больше или меньше), то $K_{eff} = \sqrt{5}/2 = 1.1180$. Если они различаются в полтора раза (все равно, больше или меньше), то $K_{eff} = \sqrt{13}/3 = 1.2019$.

Таким образом, максимальное значение коэффициента эффективности K_{eff} в случае $r = 0$ существенно больше единицы (равно $\sqrt{2}$ при $A \bar{X}/\bar{Y} = 1$).

Эти результаты подытоживает следующая

Теорема 3. Пусть X_i и Y_i , $i = 1, \dots, N$, где $N > 3$, есть два набора данных, SD_X и SD_Y есть их стандартные отклонения, \bar{X} и \bar{Y} есть их средние значения, и r есть коэффициент корреляции Пирсона между X и Y . Пусть статистики удовлетворяют условиям $SD_X, SD_Y > 0$, $\bar{X}, \bar{Y} > 0$, $r = 0$, $a = SD_Y/SD_X$. Введем безразмерные переменные $U_i = X_i/\bar{X}$ и $V_i = Y_i/\bar{Y}$, $i = 1, \dots, N$. Тогда $CV(X) = CV(U)$, $CV(Y) = CV(V)$ и $CV(X + aY) = CV(U + aV)$, причем $a' = [CV(X)/CV(Y)]^2$ и $a = \bar{Y}/(A^2 \bar{X}) = [CV(X)/CV(Y)]^2/A$. При $r = 0$ коэффициенты эффективности K_{eff} для сочетания исходных переменных $X+aY$ и сочетания безразмерных переменных $U + a'V$ совпадают. Кроме того, наибольшее значение K_{eff} для пары некоррелированных переменных равно $\sqrt{2}$ и оно достигается при $CV(Y)/CV(X) = 1$ и только при этом значении $CV(Y)/CV(X)$.

Доказательство дано выше.

Таким образом, согласно это теореме, при $r = 0$ коэффициенты вариации, а вместе с ними и коэффициент эффективности не зависят от того, преобразованы переменные в безразмерный вид или нет. Кроме того, теоретический максимум K_{eff} для двух некоррелированных переменных (для которых $r = 0$) равен $\sqrt{2}$.

5. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

До сих пор мы рассматривали только пару переменных (антагонистов или спутников) и

стабильное сочетание для них. В общем случае число переменных n может быть больше двух. Это ставит вопрос об обобщении результатов на многомерный случай, когда $n > 2$.

К сожалению, обобщить простую формулу типа (1.1) на многомерный случай не удастся. Поэтому мы предлагаем использовать при $n > 2$ итеративный подход, суть которого состоит в следующем.

Вначале отыскиваем решение (то есть переменную P_1 стабильного сочетания и параметр

a_1) для пары переменных X_1 и X_2 , используя теорему 1 или теорему 2. Затем с помощью тех же теорем находим решение P_2 (и a_2) рассматривая в качестве пары P_1 и следующую переменную X_3 . И так далее. Процесс завершается при использовании всех n переменных.

Например, для двух переменных X и Y (антагонистов) находим с помощью теоремы 1 сочетание $X+aY$. Теперь, если третий вектор Z есть антагонист для сочетания $W = X+aY$, то по той же теореме сочетание для W и Z находим как $W+bZ$, то есть искомое сочетание тройки X, Y и Z есть $X+aY+bZ$, где $a, b > 0$. Если же Z есть спутник для W , то сочетание для W и Z находим с помощью теоремы 2 как $W + c(2\bar{Z}E - Z)$, то есть искомое сочетание есть $X + aY + c(2\bar{Z}E - Z)$, где $a, c > 0$. И так далее. Отметим, что при $n > 2$ результирующее сочетание может не быть ни антагонистом, ни спутником.

6. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ СТАБИЛЬНЫХ СОЧЕТАНИЙ

Согласно теоремам 1 и 2, средние значения \bar{X} и \bar{Y} должны быть положительны, что часто выполняется для данных измерений $X_i \geq 0, Y_i \geq 0$. Это требование положительности средних составляет ограничение рассматриваемого метода наименьшей вариабельности. В то же время, если

мы располагаем данными о ряде показателей X, Y, \dots, Z , то мы можем использовать коэффициенты эффективности $Keff$ каждой пары этих показателей для составления **ряда стабильных сочетаний** с целью выявления наиболее стабильных из них, то есть имеющих наибольшие значения $Keff$. Число различных парных сочетаний для m показателей есть $m(m-1)/2$. Поскольку оно быстро растет с m , имеет смысл ограничивать рассматриваемое число парных сочетаний «значимыми», для которых $Keff$ больше $\sqrt{2} = 1.4142$, так как согласно теореме 3 при $r = 0$ максимально возможное значение $Keff$ есть $\sqrt{2}$. При $r \neq 0$ значения $Keff$ могут быть больше или меньше, причем всегда $Keff > 1$.

В работе [12] изучались концентрации тяжелых металлов (Al, Fe, K, Ca, Mg, Mn, Cu и Zn) в серой лесной почве луга на юге Московской области, а также плотность D почвы и содержание органического углерода Сорг в слоях: верхнем 0–10 см, нижнем 10–20 см и объединенном 0–20 см. Электрохимические взаимодействия ионов металлов в почве могут приводить к появлению таких пар металлов, концентрации которых демонстрировали бы относительно высокие $Keff$. Ряд стабильных сочетаний для металлов, Сорг и D , измеренных в 47 точках, рассчитан в работе [13], рис. 2.

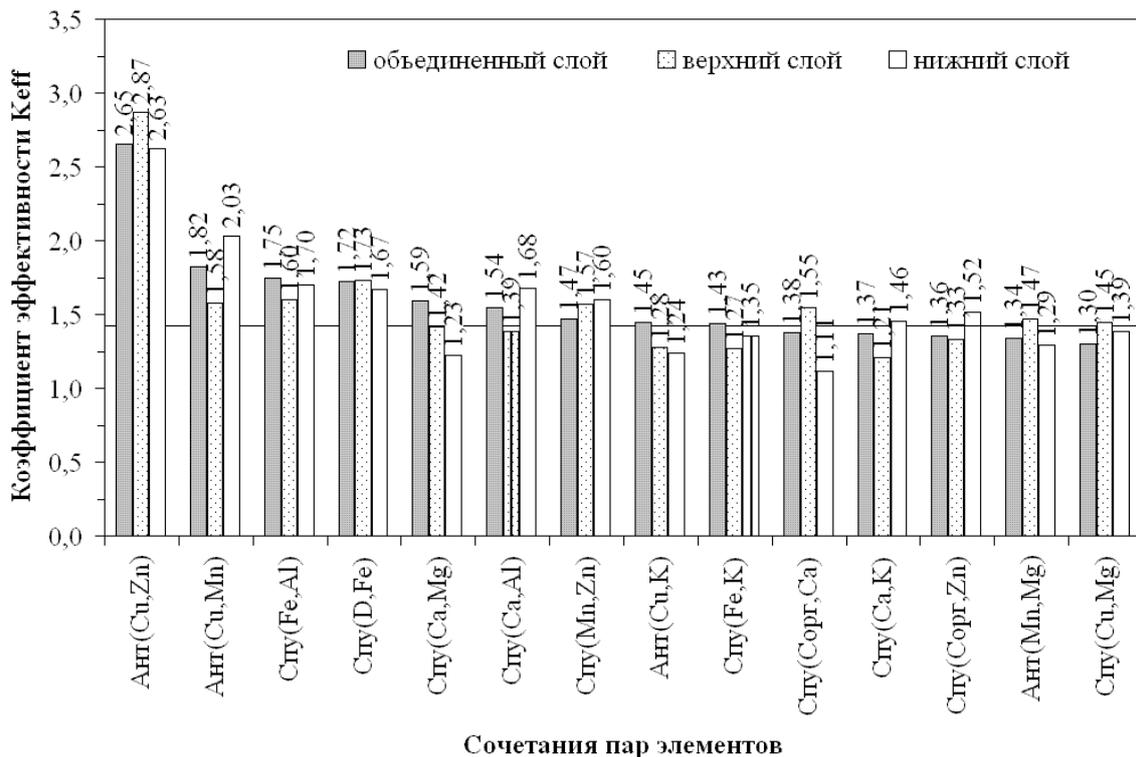


Рис. 2. Ряд стабильных сочетаний пар характеристик почв. «Ант» означает антагонист, «Спу» – спутник. Горизонтальная черта отвечает $Keff = \sqrt{2}$.

Из рис. 2 видно, что лидером по $Keff$ является сочетание Cu и Zn, причем концентрации этих металлов в почве являются антагонистами. Зависимость CV от a для этих металлов в

объединенном слое для этих данных показана выше (рис. 1).

Концентрации Cu и Zn связаны отрицательно (так как они антагонисты), поэтому их карты выглядят как позитив и негатив [13], рис. 3.

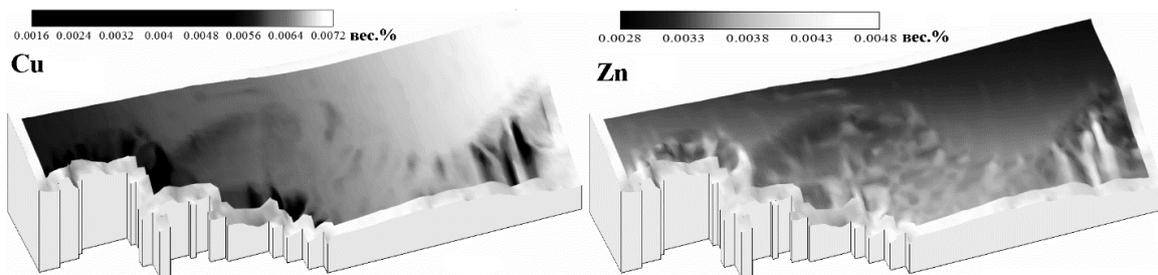


Рис. 3. Предсказательные карты концентраций Cu и Zn в слое почвы 0–20 см.

Для объяснения рассматриваются известные из химии механизмы электрохимического антагонизма между Cu и Zn, обусловленные высокой разностью окислительно-восстановительных потенциалов этих элементов [13]. Из общей химии известно, что ионы Zn^{2+} замещают или вытесняют ионы Cu^{2+} из водного раствора в твердую фазу; возникающая при равенстве их концентраций разность электрохимических потенциалов проводит к направленной диффузии этих элементов, так что места скопления ионов Zn^{2+} оказываются обеднены ионами Cu^{2+} , и наоборот. В химии почв это явление также называют антагонизмом меди и цинка [14].

В качестве другого примера рассмотрим эмпирический вывод закона сохранения энергии в механике. Если взять данные идеальной механической системы, груза на пружинке, то по данным измерений координаты x и скорости v груза можно с помощью CV получить закон сохранения энергии. Для этого, положив массу груза m , жесткость пружины k и скорость груза v_0 в точке равновесия $x=0$ равными 1, из уравнения движения $d^2x/dt^2 = -x$ находим $x = \sin t$, $v = \cos t$. Рассчитаем теперь для ряда значений времени t значения переменных $X = x^2/2$ и $Y = v^2/2$, к которым добавим небольшие ошибки (от «измерений»). Это дает $CV(X) = 57\%$, $CV(Y) = 85\%$ и $CV(X+aY) = 0.1\%$ при $a = 1.00$, то есть величина $x^2/2+v^2/2$ очень мало варьирует во времени (коэффициент эффективности $Keff = 570$) и близка к константе, равной среднему $(x^2/2+v^2/2)_{CP} = 0.51$. Этим эмпирически выведен закон сохранения энергии, причем точное значение инварианта, полной энергии, равно $kx^2/2 + mv^2/2 = mv_0^2/2 = 0.5$.

В почвоведении, сельском хозяйстве и экологии строгий теоретический вывод инвариантов (как в механике) редко возможен, но здесь остается и становится более важной возможность эмпирического вывода стабильных сочетаний. Описанный здесь метод наименьшей вариабельности и построение рядов стабильных сочетаний являются удобными средствами для этого, не требующими специальных компьютерных программ.

Рассмотрим пример из сельского хозяйства. При изучении характеристик урожайности озимой пшеницы в Окском бассейне [11] рассматривали на 41-м опытном участке урожайность в опыте Ox при внесении оптимальной дозы удобрений и урожайность в контроле K , то есть без внесения

удобрений. Корреляция между этими двумя показателями положительна ($r = 0.886$), то есть они являются спутниками и по теореме 2 их стабильное сочетание есть $K+1.160(2Ox_{CP}-Ox)$ при $Keff = 3.64$ и $CV(a) = 11.4\%$. Поскольку из-за малости $CV(a)$ это стабильное сочетание близко к константе, то приравнивая это сочетание к его среднему значению $K_{CP}+1.160 \cdot Ox_{CP}$, выражаем Ox через средние и K :

$$Ox = Ox_{CP} + (K - K_{CP}) / 1.160. (6.1)$$

Это дает оценку связи между урожайностью в опыте и в контроле, позволяя сделать следующие заключения.

- При наблюдаемом среднем контроле озимой пшеницы $K_{CP} = 19.6$ ц/га, находим из (6.1) $Ox = Ox_{CP}$, что равно 31.3 ц/га; при средних значениях контроля опыт на 60% больше, чем контроль K_{CP} .

- При низких значениях контроля, когда $K = K_{CP} - K_{SD}$ (8.66 ц/га), то есть меньше среднего на одно стандартное отклонение $K_{SD} = 11.0$ ц/га; подставляя в (6.1) это значение K , получаем значение опыта Ox , равное 21.9 ц/га. Это значение опыта превосходит этот низкий контроль (8.66 ц/га) на 152%.

- При высоких значениях контроля $K = K_{CP} + K_{SD}$ (30.6 ц/га), подставляя в (6.1) это значение K , получаем значение опыта 40.8 ц/га. Это значение опыта превосходит этот большой контроль (30.6 ц/га) лишь на 33.2%.

Из этих результатов видно, что при оптимальном внесении удобрений на участках, имеющих низкие (по сравнению со средним для региона) урожаи в контроле (8.66 ц/га), опыт Ox более чем в 2.5 раза превосходит контроль. Это означает, что эффективность применения удобрений на таких полях относительно высока. На полях же, имеющих высокие урожаи в контроле (30.6 ц/га) опыт Ox превосходит контроль менее чем на треть. То есть, *относительный* эффект применения удобрений на полях в высокими урожаями в контроле сравнительно низкий.

Однако в *абсолютном* исчислении результаты выглядят обратными. На полях с низкими для региона значениями контроля (8.66 ц/га) значение опыта Ox составляет 21.9 ц/га, а на полях с высокими для региона значениями контроля (30.6 ц/га) – 40.8 ц/га.

Эти результаты помогают оптимизировать внесение удобрений для полей с различными значениями урожайности в контроле [11].

Отметим, что для расчетов не требовалась специальная программа, достаточно было использовать общедоступную программу Excel.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966. 300 с.

Гаусс К.Ф. (1828). Общие исследования о кривых поверхностях. / Об основаниях геометрии. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. С. 123–161.

Докучаев В.В. (1901) Лекции о почвоведении / Докучаев В.В. Избранные сочинения. Т. 3. Картография, генезис и классификация почв. М.: Сельхозгиз, 1949. С. 342.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. Изд. 3-е. М.: Наука, 1976. 584 с.

Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.

Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений // Стохастическая оптимизация в информатике. 2007. Т. 3. С. 51–84.

Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002. 461 с.

Харитонов С.И., Волотовский С.Г., Хонина С.Н., Казанский Н.Л. Распространение импульсов поля и расчёт динамических инвариантов в волноводе с выпуклой оболочкой // Компьютерная оптика. 2018. Т. 42, № 6. С. 947–958.

Хачумов М.В. Применение инвариантов в управлении техническими системами // Современные наукоемкие технологии. 2022. № 9. С. 72–77.

Шарый П.А. Ряды стабильностей пар элементов в серой лесной почве // Биосферные функции почвенного покрова. Материалы Всероссийской научной конференции, посвященной 40-летию юбилею Института физико-химических и биологических проблем почвоведения РАН. Пушкино: SYNCHROBOOK, 2010. Часть 3. С. 347–349.

Шарый П.А., Рухович О.В., Шарая Л.С., Рухович Ф.Д. Метод оценки стабильных сочетаний характеристик урожайности. Плодородие. 2012. № 5(68). С. 41–42.

Шарый П.А., Пинский Д.Л. Статистическая оценка связи пространственной изменчивости содержания органического углерода в серой лесной почве с плотностью, концентрацией металлов и рельефом // Почвоведение. 2013. № 11. С. 1344–1356.

Шарый П.А. Геоморфометрический анализ пространственной изменчивости почв и экосистем // Автореферат диссертации ... доктора биологических наук. Ростов-на-Дону, 2016. 49 с.

Bolt G.H., Bruggenwert M.G.M. Soil Chemistry. Basic Elements. 2-nd revised edition. Amsterdam: Elsevier, 1978. 281 p.

Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1952. Series B. vol. 237. no. 641. P. 37–72.

Евразийский Союз Ученых.

Серия: технические и физико-математические науки

Ежемесячный научный журнал

№ 2 (105)/2023 Том 1

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Макаровский Денис Анатольевич

AuthorID: 559173

Заведующий кафедрой организационного управления Института прикладного анализа поведения и психолого-социальных технологий, практикующий психолог, специалист в сфере управления образованием.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Штерензон Вера Анатольевна

AuthorID: 660374

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт новых материалов и технологий (Екатеринбург), кандидат технических наук

Синьковский Антон Владимирович

AuthorID: 806157

Московский государственный технологический университет "Станкин", кафедра информационной безопасности (Москва), кандидат технических наук

Штерензон Владимир Александрович

AuthorID: 762704

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт фундаментального образования, Кафедра теоретической механики (Екатеринбург), кандидат технических наук

Зыков Сергей Арленович

AuthorID: 9574

Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, Отдел теоретической и математической физики, Лаборатория теории нелинейных явлений (Екатеринбург), кандидат физ-мат. наук

Дронсейко Виталий Витальевич

AuthorID: 1051220

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Кафедра "Организация и безопасность движения" (Москва), кандидат технических наук

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна. Материалы публикуются в авторской редакции.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Художник: Валегин Арсений Петрович
Верстка: Курпатова Ирина Александровна

Адрес редакции:
198320, Санкт-Петербург, Город Красное Село, ул. Геологическая, д. 44, к. 1, литера А
E-mail: info@euroasia-science.ru ;
www.euroasia-science.ru

Учредитель и издатель ООО «Логика+»
Тираж 1000 экз.

