

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ*Перевозников Е.Н.**Канд. физ.-мат. наук, доцент,
Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского***SPECTRAL ANALYSIS OF NONLINEAR SYSTEMS WITH CHAOTIC DYNAMICS***E.N. Perevoznikov**Cand. phys.-mat. Sci., Associate Professor,
Military Space Academy. A.F. Mozhaisky***АННОТАЦИЯ**

На примере модельных задач Ресслера и Спротта рассматриваются методы спектрального анализа динамики систем с хаотическим поведением. Отмечена недостаточность традиционного подхода к исследованию динамики возмущений основанного на анализе корней классического спектрального уравнения. Предлагается для исследования подобных систем использовать спектральные уравнения с различными собственными значениями, позволяющие учесть хаотичность и множественность состояний.

ANNOTATION

Using the model problems of Ressler and Sprott as examples, methods of spectral analysis of the dynamics of systems with chaotic behavior are considered. The insufficiency of the traditional approach to the study of the dynamics of perturbations based on the analysis of the roots of the classical spectral equation is noted. It is proposed to use spectral equations with different eigenvalues to study such systems, which make it possible to take into account the randomness and multiplicity of states.

Ключевые слова: нелинейные системы, неустойчивости и хаос, спектральные методы анализа.

Key words: nonlinear systems, instabilities and chaos, spectral methods of analysis.

1. Введение

Значительное количество публикаций посвященных нелинейным системам со сложной хаотической динамикой и различным переходным процессам в них говорит о неослабевающем интересе к этим системам и методам описания их [1-8].

К проблемам описания нелинейных систем со сложной динамикой приводят задачи различных областей математики, механики, физики, теории управления и других наук. Например: возникновение хаоса в детерминированной задаче трех тел; неустойчивость фазовых траекторий в задачах статистической физики; проблема перехода к турбулентности в гидродинамике; возникновение хаотических колебаний в нелинейных задачах радиотехники и электроники и др.

У истоков методов описания сложной динамики стояли стояли такие классики, как Пуанкаре, Ферми, Ляпунов, Колмогоров, Андронов. Много сделано в изучении и понимании процессов сложной динамики и возникновения хаоса в работах Синая, Шильникова, Гапонова-Грехова, Ланде, Лоренца, Кузнецова, Рабиновича, Анищенко и др. [1-8].

Одним из основных методов анализа сложной динамики и условий возникновения хаоса является расчет показателей Ляпунова [7,8]. Определение Ляпуновских показателей является непростой задачей в основном реализуемой численными методами. В настоящей работе рассматриваются спектральные методы – классический и предлагаемая его модификация- метод различных собственных значений (РСЗ). Возможности

методов сравниваются на модельных задачах Ресслера и Спротта явно демонстрирующих хаотическое поведение.

2. Классический спектральный метод анализа устойчивости.

Пусть уравнения (1), описывающие исследуемую на устойчивость систему, представляют собой совокупность нелинейных автономных уравнений

$$d_t a_\alpha \equiv \frac{da_\alpha}{dt} = F_\alpha(\{a_\alpha\}) \quad (1)$$

Динамика возмущений системы (1) в этом случае описывается уравнениями

$$d_t \delta a_\alpha = \sum_\beta \frac{\delta F_\alpha}{\delta a_\beta} \cdot \delta a_\beta \equiv E_{\alpha\beta} \delta a_\beta \quad , \quad \alpha, \beta = 1 \dots n \quad (2)$$

где $E_{\alpha\beta}(\{a_\alpha(t)\})$ – элементы эволюционной матрицы, зависящие от динамических переменных $\{a_\alpha\}$ и времени t .

Если все временные производные в (2) отрицательны, то возмущения затухают и система устойчива по Ляпунову. Если существует хотя бы одна положительная производная, то фазовые траектории разбегаются, система неустойчива. Соотношение знаков временных производных позволяет также определить возможность хаотического поведения и образования в фазовом

пространстве сложных локализованных конструкций – аттракторов [1,8] (см. рис.1)

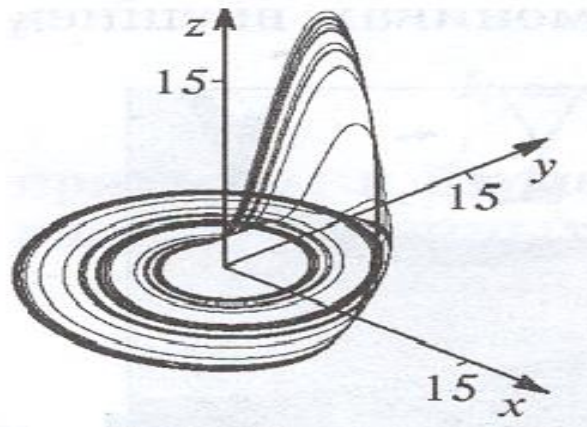


Рис.1 Аттрактор Ресслера при $e = d = 0.2$ $r = 5.7$

А именно : если знаки собственных значений $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ - временных производных (для трехмерных систем) равны

- a) $Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (-, -, -)$
- b) $Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (0, -, -)$,(3)
- c) $Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (-, 0, +)$

то динамический режим имеет характер соответственно

- a – устойчивой точки;
- b – предельного цикла;
- c – аттрактора (хаотической динамики).

Т.е. хаотическое поведение характеризуется наличием в спектре особой точки седло-фокуса и выражается в нерегулярных неустойчивых колебаниях. Хаос подразделяется на диссипативный и активный. Диссипативный хаос связан с наличием притягивающих центров и уменьшением фазового объема системы (напр. хаос в модели Лоренца), при активном хаосе фазовые траектории разбегаются и фазовый объем увеличивается (см. рис.1).

Условием диссипативности- активности хаоса является дивергенция вектора скоростей -системы $\vec{B}(\partial_t x, \partial_t y, \partial_t z)$ одновременно являющаяся одним из условий устойчивости

$$divB = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (4)$$

Если $divB < 0$ фазовый объем уменьшается, траектории сближаются - хаос диссипативный. Если $divB > 0$ то фазовый объем увеличивается, траектории разбегаются – система активна

Согласно классическому спектральному методу знаки временных производных в системе (2) соответствуют знакам корней спектрального уравнения - (CV),

которое представляет собой условие разрешимости системы (2) и имеет вид полинома относительно спектрального параметра λ

$$D = \det[\delta_{\alpha,\beta}\lambda - E_{\alpha,\beta}] = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \lambda^{n-i} = 0 \quad (5)$$

Поэтому классический спектральный анализ сводится к анализу корней спектрального уравнения. А работах [9,10] сформулированы критерии нейтральности, которые позволяют не решая спектральные уравнения по коэффициентам динамических или спектральных уравнений получать условия возникновения неустойчивости и хаоса линейных систем (нейтральность-промежуточное состояние между устойчивыми и неустойчивыми состояниями, условие нейтральности- $\lambda=0$).

Уравнения для собственных векторов эволюционной матрицы $\{\chi_i(\lambda_k)\}$ и решений системы (2) ,в этом случае, соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} (\delta_{im}\lambda_k - e_{im}) \cdot \chi_{im}(\lambda_k) &= 0 \\ a_i &= C_m \cdot \chi_{im}(\lambda_k) \cdot \exp(\lambda_k t) \end{aligned} \quad (6)$$

Этот подход хорошо применим для линейных систем (их можно свести к одному уравнению высшего порядка с одним спектральным параметром). Однако, применение классического спектрального метода к нелинейным системам, особенно к системам с хаотической динамикой вызывает ряд вопросов:

а) n -мерные системы с хаотической динамикой характеризуются n числом вещественных параметров - показателей Ляпунова, тогда как спектральный метод дает меньшее количество (например для трехсистем с хаосом – три показателя Ляпунова, а по спектральному методу- один вещественный корень и два комплексно сопряженных т.е. два вещественных параметра);

б) из (5) следует, что все компоненты собственного вектора одинаково зависят от времени , тогда как в действительности поведение

компонент различно (см.рис.1). В традиционном анализе это частично снимается линейной комбинацией собственных векторов (5);

в) классический подход указывает лишь границу устойчивости-неустойчивости (в том числе перехода к хаосу) а действительности имеется чередование областей регулярной и хаотической динамик, т.е. несколько различных динамических режимов.

Выше отмеченное указывает на недостаточность в традиционном варианте спектрального метода для описания систем с хаотической динамикой и необходимости его модернизации.

Заметим, что метод L-критерия [9] описывает динамику n – мерных систем n – вещественными параметрами.

Сформулируем для описания систем с хаотической динамикой метод различных собственных значений – РСЗ.

3 Метод РСЗ

Предварительно отметим следующее: известно, что системы третьего порядка отражают основные особенности динамики нелинейных систем, поэтому далее для определенности будем говорить только о них.

Предположим, что в уравнении для возмущений (2) временные производные характеризуются различными спектральными параметрами λ , тогда спектральное уравнение для трех системы принимает вид

$$\det[\delta_{ik}\lambda_i - e_{ik}] = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_1\lambda_3e_{22} + \lambda_1\lambda_2e_{33} + \lambda_3\lambda_2e_{11}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i + D = 0$$

$$A_1 = e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}, A_2 = e_{11}e_{33} - e_{13}e_{31}, A_3 = e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}, \quad (7a)$$

$$D = e_{11}(e_{23}e_{32} - e_{22}e_{33}) + e_{33}e_{12}e_{21} + e_{22}e_{13}e_{31} - e_{12}e_{23}e_{31} - e_{13}e_{32}e_{21}$$

Отметим что, спектральное уравнение в этом случае не имеет вид полинома относительно одного спектрального параметра λ , а представляет собой алгебраическую функцию трех взаимозависимых спектральных параметров $-\lambda_i$.

Полагая, например, $\lambda_1 = Re \lambda_1 = \lambda$, $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\omega$ из СУ (7) после выделения вещественной и мнимой частей уравнения получаем:

$$(\alpha^2 + \omega^2) \cdot (\lambda - e_{11}) - \lambda\alpha(e_{22} + e_{33}) + A_1\lambda + \alpha(A_2 + A_3) + D = 0$$

$$\omega[\lambda(e_{22} - e_{33}) + (A_2 - A_3)] = 0 \quad (7b)$$

Из (7,б) для λ_1 , α имеем

$$\lambda_1 = \frac{A_3 - A_2}{e_{22} - e_{33}}, \quad \alpha_{2,3} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4NG}}{2N}$$

$$N = \lambda_1 - e_{11}, M = -\lambda_1(e_{22} + e_{33}) + A_2 + A_3, G = \omega^2(\lambda_1 - e_{11}) + \lambda_1 A_1 + D \quad (8)$$

Соотношения (8) дают нам три вещественных параметра, два из которых зависят от частоты- ω и ограничение для ω - ($M^2 - 4NG \geq 0$). Также можно получить аналогичные (7,8) уравнения для случаев $\lambda_2 = Re \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = Re \lambda_3 = \lambda$. Это дает дополнительно еще два динамических режима.

Таким образом, зависимость спектральных параметров от частоты и дополнительные

динамические режимы образуют области неустойчивости и хаоса.

Продемонстрируем на модельных задачах Ресслера и Спротта эти методы (классический спектральный и РСЗ).

4.Модельная задача Ресслера -нелинейная задача имеющая явно выраженную область хаотического поведения с аттрактором представленным на рис.1. см. [7,8].

Уравнения модели Ресслера имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t x &= -y - z \\ \partial_t y &= x + e \cdot y \\ \partial_t z &= d - r \cdot z + x \cdot z \end{aligned} \quad (9)$$

x, y, z – динамические переменные; e, d, r – параметры, γ – управляющий параметр.
 Дивергенция вектора скоростей $\vec{B}(\partial_t x, \partial_t y, \partial_t z)$ характеризующая диссипативность системы равна

$$\text{div} B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = e - r + x = \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad (10)$$

Из (10) следует, что система Ресслера диссипативна только в ограниченной области. Система (9) имеет два стационарных решения – стационарных состояния (x_s, y_s, z_s)

$$\begin{aligned} \partial_t x &= 0 & y_s &= -z_s \\ \partial_t y &= 0 & x_s &= e \cdot z_s \\ \partial_t z &= 0 & z_{s\pm} &= \frac{r}{2e} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2e}\right)^2 - \frac{d}{e}} \end{aligned} \quad (11)$$

которые возможны при условии $r \geq 2e \cdot d$. Для параметров Ресслера $e = d = 0.2, r = 5.7$ стационарные решения имеют вид $st(1)=st(z_{-s}), st(2)=st(z_{+s})$

$$st(1) \quad x_s = 0.01 \quad z_s = -y_s = 0.05 \quad ; \quad st(2) \quad x_s = 5.69 \quad z_s = -y_s = 28.95 \quad (12)$$

Линеаризация уравнений (9) относительно решения $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, в качестве которого может быть выбрано любое решение в том числе и стационарное, дает систему уравнений для возмущений (2), где эволюционная матрица равна

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & e & 0 \\ \tilde{z} & 0 & \tilde{x} - r \end{pmatrix} \quad (13)$$

Классическое спектральное уравнение системы (9) и его коэффициенты соответственно равны

$$\det[\delta_{\alpha,\beta} \lambda - E_{\alpha,\beta}] = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 ;$$

$$a_1 = -(e + x_s - r) \quad , \quad a_2 = [1 + x_s(e^{-1} + e) - re] \quad , \quad a_3 = -(2x_s - r) \quad (14)$$

Критерий НРИ [9] для СУ (14) дает два критических (нейтральных режима), критическая частота в которых и условие нейтральности имеют вид

$$\begin{aligned} 1) \quad \omega_{cr} &= 0 \quad , \quad 2x_s - r = 0 \\ 2) \quad \omega_{cr} &= \sqrt{1 + x_s(e^{-1} + e) - re} \quad , \quad e(x_s - r)(x_s - r + e) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Анализ условий (15) совместно с условиями стационарности (11) показывают, что при $r = 2e = 0.4$ оба условия (15) совпадают а, корни СУ (14) равны

$$\lambda_1 = 0 \quad ; \quad \lambda_{2,3} = 0 \pm 1.7i \quad (16)$$

Первый критический режим реализуется только для второго стационарного состояния ($r \geq 2e = 0.4$), которое при $r > 0.4$ становится неустойчивым, а корни СУ, например при $\gamma = 0.5$ соответственно равны

$$\lambda_1 = -0.215 \quad ; \quad \lambda_{2,3} = 0.00546 \pm 1.19i \quad (17)$$

Второй критический режим реализуется для первого стационарного состояния, которое также неустойчиво при $r > 0.4$. И при $\gamma = 0.5$ корни СУ становятся равными

$$\lambda_1 = 0.101 \quad ; \quad \lambda_{2,3} = -0.0054 \pm 1.7i \quad .(18)$$

Такими образом оба стационарных состояния по-разному являются неустойчивыми.

Спектральное уравнение по методу РСЗ (7а) для задачи Ресслера с эволюционной матрицей (13) принимает вид $(x_+ \equiv x_s - r)$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 - (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot x_+ + \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot e) + (\lambda_1 \cdot e \cdot x_+ + \lambda_2 \cdot z_s + \lambda_3) - (x_+ + e \cdot z_s) = 0 \quad .(19)$$

а) первый динамический режим ($\lambda_1 = Re \lambda = \lambda$, $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\omega$) из СУ (19) разделяя вещественную и мнимую части получаем

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha^2 + \omega^2) - \lambda\alpha(x_+ + e) + \lambda \cdot e \cdot x_+ + \alpha(z_s + 1) - (x_+ + e \cdot z_s) &= 0 \\ \omega\{\lambda(e - x_+) + (z_s - 1)\} &= 0 \end{aligned} \quad .(20)$$

Из (20) находим

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{z_s - 1}{x_+ - e} \quad ; \quad \alpha_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\lambda \cdot G}}{2\lambda} \\ B = -\lambda(x_+ + e) + z_s + 1 \quad ; \quad G = \lambda(\omega^2 + e \cdot x_+) - (x_+ + e \cdot z_s) \end{aligned} \quad (21)$$

спектральные параметры и верхнюю границу частоты в этом режиме

$$B^2 - 4\lambda \cdot G \geq 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{\max}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \left[\frac{B^2}{4\lambda} - \lambda \cdot e \cdot x_+ + (x_+ + e \cdot z_s) \right] \quad .(22)$$

Из (20,21) следует, что при $z_s = 1$ ($r=2e$) $\lambda = \alpha = 0$, это совпадает с условием нейтральности (15,2;16). Т.е. формулы, полученные по методу РСЗ включают в себя и результаты классического спектрального анализа.

Можно показать, что динамические режимы $\lambda_2 = Re \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = Re \lambda_3 = \lambda$ в данной задаче не

реализуются, стационарных состояний в них не существует.

В таблицах 1,2 приведены результаты расчета спектральных параметров и граничной частоты по формулам (21,22) в зависимости от параметров r/e для стационарных состояний $st(1)$, $st(2)$.

Таблица 1.

Зависимость спектральных характеристик модели Ресслера от параметров r,e для $st(1)$

r/e	λ	ω_{\max}^2	ω^2	α_1	α_2
1/0.2	0.681	0.447	0.44	-1.18	-1.35
-	-	-	0.3	-0.881	-1.65
3/0.2	0.297	0.781	0.5	-2.68	-3.75
-	-	-	0.3	-2.52	-3.51
5.7/0.2	0.164	1.312	1.30	-5.91	-5.93
-	-	-	1.0	-5.35	-6.46

Таблица 2.

Зависимость спектральных характеристик модели Ресслера от параметров r,e для $st(2)$

r/e	λ	ω_{\max}^2	ω^2	α_1	α_2
1/0.2	-15.7	0.0194	0.019	0.241	0.266
-	-	-	0.001	0.124	0.404
3/0.2	-65.3	0.0035	0.0034	0.214	0.217
-	-	-	0.001	0.165	0.265
5.7/0.2	-132	0.00161	0.001	0.182	0.232

Из таблиц следует, что оба стационарных состояния неустойчивы. В первом состоянии (Табл.1) неустойчивость связана с одной модой она заметно возрастает, две другие представляют собой затухающие колебания – это соответствует картине на фазовой плоскости (см. рис.1). Во втором состоянии (Табл.2) одна мода возмущений быстро затухает две другие представляют собой низкочастотные усиливающие

колебания. Хаотические колебания (хаос) присутствуют в обоих стационарных состояниях, причем в первом состоянии он диссипативен во втором активен (см.10,12). Из таблиц также видна зависимость скорости изменения колебаний от частоты.

5. Модельная задача Спротта
Уравнения модели Спротта равны

$$\begin{aligned} \partial_t x &= x \cdot y - z \\ \partial_t y &= x - y \\ \partial_t z &= x + a \cdot z \end{aligned} \quad (23)$$

где x, y, z – динамические переменные; a – параметр. Дивергенция вектора скоростей $\vec{B}(\partial_t x, \partial_t y, \partial_t z)$, характеризующая диссипативность системы равна

$$\text{div} B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = y - 1 + a = \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad (24)$$

Из (24) следует, что в зависимости от параметра a система может быть активной так и диссипативной.

Система (23) имеет два стационарных решения – стационарных состояния (x_s, y_s, z_s)

$$\begin{aligned} \partial_t x &= 0 \\ \partial_t y &= 0 \\ \partial_t z &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad st(1) = (0, 0, 0) \quad , \quad st(2) = \left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, -\frac{1}{a} \right) \quad (25)$$

Эволюционная матрица для возмущений системы (23) имеет вид

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} y & x & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (26)$$

Классическое спектральное уравнение системы (23) и его коэффициенты соответственно равны

$$\det[\delta_{\alpha,\beta} \lambda - E_{\alpha,\beta}] = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad ; (27)$$

$$a_1 = (1 - a - y) \quad , \quad a_2 = -x + (1 - y) \cdot (1 - a) \quad , \quad a_3 = 1 + a(y + x)$$

Для $st(1)$ СУ (27) и его корни соответственно равны

$$(\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 - a \cdot \lambda + 1) \quad ; \quad \lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} \quad (28)$$

Из (28) следует, что при $a \in (0, 2)$ состояние $st(1)$ неустойчиво и испытывает слаборастущие хаотические колебания. При $a > 2$ состояние

неустойчиво, две моды аperiodически растут. При $a < 0$ состояние устойчиво.

Для $st(2)$ СУ (27) приобретает вид

$$\lambda^3 + \left(1 + \frac{1}{a} - a\right)\lambda^2 + \left(\frac{2}{a} - a\right)\lambda - 1 = 0 \quad .(29)$$

Критерий НРИ [9] для этого состояния дает

$$\left(1 - a + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{2}{a} - a\right) + 1 = \frac{>0(Y)}{<0(HY)} ; \quad \omega_{cr}^2 = \frac{-1}{(1 - a + a^{-1})} \quad .(30)$$

Из (30) следует, что при $a > 1.7$ система неустойчива, в ней возникают нарастающие колебания частотой ω_{cr} . При $a < 0$ этот режим не реализуется.

Спектральное уравнение по методу РСЗ системы (23) равно (31)

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 + (\lambda_1 \cdot \lambda_3 - y \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 - a \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2) + (-a \cdot \lambda_1 + a \cdot y \cdot \lambda_3 - \lambda_3(x + y) + \lambda_2) + [a \cdot (x + y) + 1] = 0$$

а) первый динамический режим (,разделяя на вещественную и мнимую части $\lambda_1 = Re \lambda_1 = \lambda$, $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\omega$) из СУ (31) аналогично (20,21) для λ_1 , $\alpha_{2,3}$ получаем

$$\lambda = a \cdot (y - 1) + (x + y) + 1 ; \quad \alpha_{2,3} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A \cdot G}}{2A} \quad .(32)$$

$$A = \lambda - y \quad , \quad B = \lambda(1 - a) + ay + 1 - (x + y) ; \quad G = \omega^2 A + a \cdot (x + y) + 1$$

. Для $st(1)$ из (32) получаем

$$\lambda = 1 - a ; \quad \alpha_{2,3} = \frac{-(\lambda^2 + 1) \pm \sqrt{(\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda(\omega^2 \lambda + 1)}}{2\lambda} ; \quad \omega^2 \leq \left[\frac{(\lambda^2 + 1)^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \right] \quad .(33)$$

Из (33) следует, что при $a < 1 \rightarrow \lambda > 0$, $\alpha_{2,3} < 0$ система неустойчива, присутствуют затухающие колебания. При $a > 1 \rightarrow \lambda < 0$, $\alpha_+ < 0$, $\alpha_- > 0$ в системе существуют слаборастущие хаотические колебания.

б) второй динамический режим $\lambda_2 = Re \lambda = \lambda$, $\lambda_{1,3} = \alpha \pm i\omega$ устойчив и представляет собой затухающие колебания ; третий динамический режим не реализуется.

Для $st(2)$ (25) и первого динамического режима ($\lambda_1 = Re \lambda_1 = \lambda$, $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\omega$) из (32) получаем (34)

$$\lambda = -\left(a + \frac{2}{a}\right) , \quad \alpha_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(a + a^{-1}) \cdot [\omega^2(a + a^{-1}) + 1]}}{-2(a + a^{-1})} , \quad \omega^2 \leq \left[\frac{a^2}{4(a + a^{-1})^2} - \frac{1}{(a + a^{-1})} \right]$$

Из (34) следует, что при $a > 0 \rightarrow \lambda < 0$, $\alpha_{2,3} < 0$ все возмущения затухают -состояние устойчиво. При

$a < 0$ значения λ , $\alpha_{2,3}$, ω в зависимости от параметра a приведены в таблице 3

Таблица 3.

Зависимость спектральных характеристик модели Спротта от параметра a для первого динамического режима в $st(2)$

a	λ	ω_{max}^2	ω^2	α_1	α_2
-1	3	0.583	0.2	-1.95	0.446
-2	3	0.56	0.5	-1.94	0.314
-3	3.67	0.503	0.5	-1.90	0.105
-5	5.4	0.423	0.2	-2.20	0.277
-7	7.29	0.39	0.2	-2.15	0.186

Из таблицы следует, что в этом состоянии система неустойчива и существуют разной интенсивности хаотические колебания.

Заключение

Таким образом, из выше рассмотренного следует, что

а) Предлагаемый метод РСЗ дает более сложную картину динамики в моделях Ресслера Спротта чем классический спектральный, в частности указывает дополнительные области неустойчивости и хаоса, что не показывает классический (например в модели Спротта неустойчивости при $a < 0$), а также включает в себя часть результатов классического анализа.

б) Хаос в задачах присутствует во всей области изменения параметров и в зависимости от последних в диссипативной или в активной форме.

в) Наличие интервалов возможных частот и параметров а также множественность динамических режимов указывает на существование в нелинейных задачах областей неустойчивости и хаоса, что есть в действительности (см. также [10])

г) В целом предлагаемый метод РСЗ изучении динамики нелинейных систем можно рассматривать как дополнительный к методам основанным на расчетах показателей Ляпунова и классическому спектральному.

Литература

1. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и модель Лоренца, сб. Бифуркации рождения цикла, М.Мир,1980,386 с.
- 2.Андронов В.А., Витт В.А., Хайкин С.Б., Теория колебаний, М. Наука, 1981.
- 3.Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика, стохастичность и структура, сб. физика XX века, М.Наука,1984,с.(219-280).
- 4.Неймарк Ю.И., Ланда П.С., Стохастические и хаотические колебания, М.Наука, 1987,424 с.
5. Мун Ф.,Хаотические колебания, Мир,1990,312 с.
- 6.Анищенко В.С., Сложные колебания в простых системах, М.Наука, 1990, 312 с.
7. Анищенко В.С., Аттракторы динамических систем, Изв. Вузов, прикладная нелинейная динамика,1997,т.5№1,(109-127).
- 8.Кузнецов С.П. Динамический хаос, ФМ. М. Физматгиз,2006.355 с.
- 9.Перевозников Е.Н., Методы анализа устойчивости неравновесных систем, Изв. Вузов, Физика, 2006, №10, с (34-39).
- 10.Перевозников Е.Н.,Особенности спектра систем с хаотической динамикой,Сб.трудов LXXIII научной конференции «Герценовские чтения, Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»,Санкт-Петербург 7-10 апреля 2020. Изд РГПУ им.А.И.Герцена,(46-52)с.