

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.872

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.

Амосова Н.Н.

*Доцент, кандидат физико-математических наук,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ)
Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,*

MATHEMATICAL ASPECTS OF THE THEORY OF QUEUING.

N.N. Amosova

*Docent, Candidat of phys.-mat. sciences,
Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU)
Russia, 195251, St.Petersburg, Polytechnicheskaya, 29
DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2022.1.103.1732*

АННОТАЦИЯ

В работе излагаются основные понятия и приводится история возникновения и развития теории массового обслуживания. Рассмотрены постановка задач теории массового обслуживания, основные элементы, характеризующие структуру системы массового обслуживания. Приведены основные типы систем массового обслуживания: системы массового обслуживания с отказами и с ожиданием, системы с неограниченным числом обслуживающих аппаратов, многофазные системы массового обслуживания и системы с приоритетами. Рассмотрены различные характеристики рассматриваемых систем, являющиеся показателями качества функционирования системы. Это показатели эффективности (вероятностные оценки) и экономические оценки работы системы.

ANNOTATION

The paper outlines the basic concepts and gives the history of the emergence and development of the theory of queuing. The formulation of problems in the theory of queuing, the main elements that characterize the structure of the queuing system are considered. The main types of queuing systems are given: queuing systems with failures and waiting, systems with an unlimited number of servers, multi-phase queuing systems and systems with priorities. Various characteristics of the systems under consideration, which are indicators of the quality of the system's functioning, are considered. These are performance indicators (probabilistic estimates) and economic estimates of the system operation.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, системы с отказами и с ожиданием, процесс размножения и гибели, показатели эффективности, экономическая оценка.

Keywords: queuing systems, systems with failures and with waiting, the process of reproduction and death, performance indicators, economic evaluation.

Введение

Теория массового обслуживания – один из прикладных разделов теории вероятностей, который входит в учебные планы различных направлений и специальностей.

На практике и в быту мы в той или иной форме встречаемся с обслуживанием и с системами массового обслуживания. Примерами таких систем могут служить телефонные станции, ремонтные мастерские, магазины, кассы, парикмахерские, поликлиники, заводские цеха, аэропорты и т.д. Рассмотрение и описание подобных систем с помощью детерминистических моделей приводит к значительным ошибкам в выводах и фактических рекомендациях. Вероятностное описание приводит к моделям, анализируемым методами теории вероятностей, теории массового обслуживания и статистического моделирования.

Теория систем массового обслуживания как раздел теории вероятностей возникла сравнительно недавно.

Первые важные результаты в области теории массового обслуживания были получены датским математиком А.К. Эрлангом (1878-1920), сотрудником Копенгагенской телефонной компании. Так как объектом исследования были телефонные системы, то и сейчас в работах по теории массового обслуживания используется терминология, заимствованная из телефонии: требования, вызовы, заявки, каналы связи, длительность разговора.

В середине 30-ых годов 20-го столетия У. Феллер (1906-1971), американский математик, ввел понятие процесса размножения и гибели, что привлекло внимание математиков к теории массового обслуживания.

Дело в том, что большое место в теории массового обслуживания при описании многих простейших систем занимает процесс, называемый процессом рождения и смерти (или процессом размножения и гибели), имеющий многочисленное применение в биологии.

Далее, российский математик А.А. Марков (1856-1922) впервые исследовал частный случай процесса без последствия, в котором прошлое процесса при известном настоящем не оказывает влияния на будущее процесса. Это свойство присуще потокам требований, поступающим в систему массового обслуживания. Такие процессы – цепи Маркова с непрерывным временем и целочисленным множеством значений – лежат в основе теории массового обслуживания.

Вслед за А.А. Марковым общую теорию марковских процессов, в том числе и цепей развивали российский математик А.А. Колмогоров (1903-1988) и его ученики.

Следует отметить, что в экономике и сфере управления производством применение теории массового обслуживания касается организации работы участка, цеха, завода, отрасли, магазина, транспортных средств и т.д.

Методы теории массового обслуживания используются и в других науках, например, в теории надежности, в разработке автоматизированных систем управления различных видов.

Методология

Основная цель теории массового обслуживания – дать рекомендации по рациональному построению системы массового обслуживания.

Предмет теории массового обслуживания – установление зависимости между характером потока поступающих требований, производительностью отдельного обслуживающего аппарата, числом обслуживающих аппаратов и эффективностью обслуживания.

Основные элементы, характеризующие структуру системы массового обслуживания, следующие:

a – входящий поток требований на обслуживание;

b – очередь требований, ожидающих начала обслуживания;

c – выходящий поток требований, получивших отказ;

d – обслуживающие аппараты;

e – выходящий поток обслуженных требований.

Следует заметить, что возможны системы, в которых отсутствуют элементы, описанные в пунктах b и c.

Процесс функционирования систем массового обслуживания носит случайный характер и поэтому методы исследования систем массового обслуживания сводятся к построению некоторых случайных процессов, которые затем исследуются.

Действительно, заявки на обслуживание в общем случае поступают в случайные моменты времени и время, затрачиваемое на обслуживание каждой заявки, также случайное. По сути дела, теория массового обслуживания — это специфический раздел теории случайных процессов.

Так как практику интересует в основном стационарный режим работы систем массового обслуживания, когда вероятности состояний систем не зависят от времени, то математическими моделями являются системы алгебраических, а не дифференциальных уравнений. Их построить легче на основе графов состояний с указанием интенсивностей переходов и принципа равновесия в стационарном режиме: сколько в среднем пришло требований в узел системы – столько в среднем и ушло.

Как было указано ранее, цель теории массового обслуживания – определение различных характеристик рассматриваемой системы, являющихся показателями эффективности функционирования системы. Для различных типов систем такие показатели различны.

Заметим, что виды систем массового обслуживания неограниченно разнообразны и, более того, всякая система массового обслуживания, рассматриваемая в теории, есть абстрактная математическая модель некоторой реальной системы.

Поэтому рассмотрим лишь основные типы систем массового обслуживания.

Системы массового обслуживания с отказами и с ожиданием.

В системах массового обслуживания с отказами требование, поступившее в систему в тот момент, когда все обслуживающие аппараты заняты, получает отказ и покидает систему необслуженным. Поэтому часто такие системы называют еще системами с потерями. Системы с отказами характерны для телефонии, откуда и произошло их название. В системах с ожиданием требование, поступившее в систему в тот момент, когда все n обслуживающих аппаратов заняты, становится в очередь и ждет начала обслуживания в порядке очереди. При этом очередь может быть неограниченно длинной и требование может покинуть систему только тогда, когда оно будет полностью обслужено. Примером такой системы является система ремонта неисправной техники. Следует выделить два типа смешанных систем массового обслуживания:

a) системы с ограничением по длине очереди. В них требование становится в очередь в том случае, если длина очереди не превышает некоторого числа m . В противном случае требование получает отказ в обслуживании. Например, заявка на доставку груза может быть принята, а может быть и отклонена, если уже очень большая очередь.

b) системы с ограничением по времени ожидания. В них время ожидания ограничено некоторым случайным числом T . Если время ожидания в очереди меньше T , то требование обслуживается, в противном случае получает отказ.

Очередь в такой системе можно интерпретировать как очередь с нетерпеливыми клиентами. Реальные очереди чаще всего такими и бывают, так как у каждого человека свой предел ожидания.

Можно привести еще такой пример: самолеты, идущие на посадку образуют входящий поток требований, но время ожидания у них ограничено из-за ограниченности запаса горючего. При невозможности принять самолет в течение определенного промежутка времени, он должен быть переориентирован на другие аэродромы.

Обслуживающие системы с ограниченным и неограниченным числом обслуживающих аппаратов. К системам с неограниченным числом обслуживающих аппаратов следует отнести те системы, в которых поступившее требование немедленно начинает обслуживаться. В таких системах нет очередей и получившее требование не может получить отказ. Примером может служить система доставки срочной почты, в которой нет ни отказов, ни очередей.

Однофазные и многофазные системы массового обслуживания. В многофазных системах выходящий поток заявок, обслуженных в первой фазе, является входящим для второй фазы и т.д. Такими являются производственные структуры при массовом производстве.

Приоритетные системы (системы с приоритетами). В этих системах на обслуживание поступает не один, а несколько потоков входящих требований P_1, P_2, \dots, P_k . При этом в первую очередь обслуживаются требования потока P_1 , требования P_2 обслуживаются в порядке своей очереди после требований P_1 и т.д. По такому принципу строится работа системы скорой помощи; в поликлинике больных с острой болью принимают вне очереди. Примером такой системы также является приоритетное обслуживание отдельных категорий пассажиров в аэропорту.

Приведем теперь показатели эффективности для некоторых типов систем.

Например, если рассматривать систему с отказами (потерями), то показателями эффективности здесь являются вероятность отказа, среднее число занятых аппаратов, вероятность простоя.

Для системы с ожиданием, при условии, что длина очереди, а также время ожидания не ограничены, показатели эффективности – это вероятность того, что требование, поступившее в систему, будет ожидать начала обслуживания, среднее время ожидания начала обслуживания, средняя длина очереди и т.д.

Зная среднее число λ требований, поступающих на обслуживание в единицу времени, и условия работы системы, можно с помощью этих характеристик подобрать рациональное число обслуживающих аппаратов. Иногда это можно сделать введя экономическую оценку работы системы.

Например, одна из простейших экономических оценок вариантов системы с отказами может быть записана в виде

$$J = dc_1n + c_2M_1 + c_3(n - M_1) + c_4T p_n \lambda,$$

где α – коэффициент предельной экономической эффективности капитальных вложений; c_1 – цена аппарата; c_2 и c_3 – годовые текущие затраты на обслуживание работающего и стоящего аппаратов; c_4 – потери производства от невыполнения одной работы (потери одного отказа), T – годовой фонд рабочего времени системы.

Здесь n – число обслуживающих аппаратов, p_n – вероятность отказа, M_1 – среднее число занятых аппаратов.

Подробно общие вопросы построения систем массового обслуживания – входящий поток требований, время и дисциплина обслуживания, а также простейшие и сложные системы массового обслуживания рассмотрены в [1-3].

Заключение

Таким образом, можно сделать вывод, что задачи теории массового обслуживания направлены на определение такого варианта системы, при котором будет обеспечен минимум затрат от простоя каналов обслуживания, потерь времени, потерь заявок или в результате отказа, или в результате ухода из очереди.

Список литературы.

Амосова Н.Н., Максимов Ю.Д. Математика. Теория массового обслуживания. Учебное пособие. Изд-во Политехн. ун-та, 2013, 200с.

Амосова Н.Н., Куклин Б.А., Макарова С.Б. и др. Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. Под общей редакцией Ю.Д. Максимова. С.-Петербург «Иван Федоров», 2001, 589 с.

Amossowa N., Gillert H., Kuchler U., Maximow J. D. Bedienungstheorie. Leipzig: Teubner Verlags gesellschaft, 1986. – 256 s.