

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 631.6; 626/627; 631.3

ФОРМИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ВОДНОГО ПОТОКА ПРИ СОПРЯЖЕНИИ БЬЕФОВ

*Фартуков Василий Александрович,
доцент кафедры гидротехнические сооружения,
ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева
Васильев Дмитрий Михайлович,
студент 3-го курса факультет Физика Высшая школа экономики,
ВШЭ г. Москва*

FORMATION OF UNSTEADINESS OF THE WATER FLOW DURING THE COUPLING OF THE BYEFS

*V.A. Fartukov,
Associate Professor of the Department of Hydraulic Structures,
FSUE VO RGAU-MSHA named after K.A. Timiryazev
D.M. Vasiliev,
3rd year student, Faculty of Physics,
Higher School of Economics, HSE Moscow*

АННОТАЦИЯ

Образование нелинейных колебаний возникающих, в зоне прыжкового сопряжения глубин в нижнем бьефе гидротехнических сооружений приводит к образованию нелинейных стационарных колебаний. Этот режим течения воды сопровождается волнами с характерной амплитудой и длиной, которые являются одними из определяющих при выборе конструкции и расчетах геометрических параметров гасителей энергии в нижнем бьефе гидротехнических сооружений.

Система нелинейных уравнений, в которых энергия водного потока диссипирует при больших амплитудах колебания водной поверхности и генерируется при малых значениях амплитуд колебания, позволяет описать физический процесс, протекающий в зоне прыжкового сопряжения бьефов. Система описывает протекающий процесс предельными циклами, которые колеблются около некоторого состояния, при котором приток и диссипация энергии сбалансированы. Это состояние протекающего процесса определяет наличие бифуркаций векторных полей течения воды в гидравлическом прыжке.

В колебательной системе незатухающие колебания практически могут существовать при наличии некоторого источника энергии, который компенсирует расход энергии, возникший за счет присутствия диссипативных сил.

ABSTRACT

The formation of nonlinear oscillations arising in the zone of the jump coupling of depths in the downstream of hydraulic structures leads to the formation of nonlinear stationary oscillations. This mode of water flow is accompanied by waves with a characteristic amplitude and length, which are one of the determining factors in choosing the design and calculating the geometric parameters of energy dampers in the downstream of hydraulic structures.

A system of nonlinear equations in which the energy of the water flow dissipates at large amplitudes of the water surface oscillation and is generated at small values of the oscillation amplitudes, allows us to describe the physical process occurring in the zone of the jump coupling of the beefs. The system describes the ongoing process by limiting cycles that fluctuate around a certain state in which the inflow and dissipation of energy are balanced. This state of the process determines the presence of bifurcations of vector fields of water flow in a hydraulic jump.

In an oscillatory system, undamped oscillations can practically exist in the presence of some energy source that compensates for the energy consumption caused by the presence of dissipative forces.

Ключевые слова: гидравлический прыжок, структура водного потока, диссипация энергии, бифуркация, автоколебательный процесс.

Keywords: hydraulic jump, water flow structure, energy dissipation, bifurcation, self-oscillating process.

Введение. Исследование форм свободной поверхности при неравномерном движении воды показало наличие случаев внезапного изменения глубины водного потока через «прыжок» [1]. Прыжок, представляет собой особую форму сопряжения двух состояний потока. В зависимости

от условий течения воды, формы русла, уклона dna русла, шероховатости dna и стенок русла, соотношения глубин перед прыжком и после прыжка образуются различные формы гидравлического прыжка. Образование формы гидравлического прыжка, макро и микропроцессы,

происходящие в прыжке, определяют потери энергии. Основной причиной потерь энергии в прыжке, является турбулентность, образование вихревых и поперечных течений. Происходит разделение расхода потока на две части: первая – соответствует основному направлению потока и вторая - обратному направлению движения водного потока. Обратный поток поднимается вверх и падает в основной поток, образуя некоторый колебательный процесс.

При этом потеря энергии объясняется поднятием этого дополнительного расхода, тем самым образовавшийся валец является источником потерь энергии.

Одной из характерных особенностей режима течения водного потока в нижнем бьефе гидротехнических сооружений, при сопряжении бьефов в виде гидравлического прыжка, является наличие стоячих волн на поверхности водного потока. Этот режим течения воды сопровождается волнами с характерной амплитудой и длиной. Образование и развитие физики протекающего процесса и последующая количественная оценка параметров колебательного процесса, оказывают существенное влияние, как на работу гасителя водной энергии в нижнем бьефе, так и на его (гасителя) геометрические размеры.

В основе математической модели процесса образования стационарных нелинейных колебаний в нижнем бьефе, находится система уравнений

мелкой воды в приближении Сен-Венана. Система уравнений Сен-Венана представлена в дивергентной форме, позволяющей охватить так называемые разрывные решения.

Система уравнений Сен-Венана является следствием решения уравнений Рейнольдса [2,3], при этом сглаживание турбулентных пульсаций нормального уровня, то есть тех пульсаций, которые порождены трением на границе жидкость - омываемая твердая поверхность, а не турбулентных пульсаций возникающих в зонах отрывных течений, возможно при осреднении уравнений Навье – Стокса.

Цель исследования. Построение математической модели описывающей протекающий колебательный процесс в открытом водном потоке нижнего бьефа гидротехнического сооружения.

В зоне гидравлического прыжка, как и во всех других случаях отрывных течений, образуется макротурбулентность. Эта макротурбулентность имеет характерный временной масштаб T_m , который существенно больше временного масштаба T_n , отвечающего обычному уравнению турбулентности без отрывных течений с зависимыми от времени t ($T_m > t > T_n$) характеристиками прыжкового потока.

На рис. 1 приведена расчетная схема и принятые обозначения гидравлических параметров гидравлического прыжка.

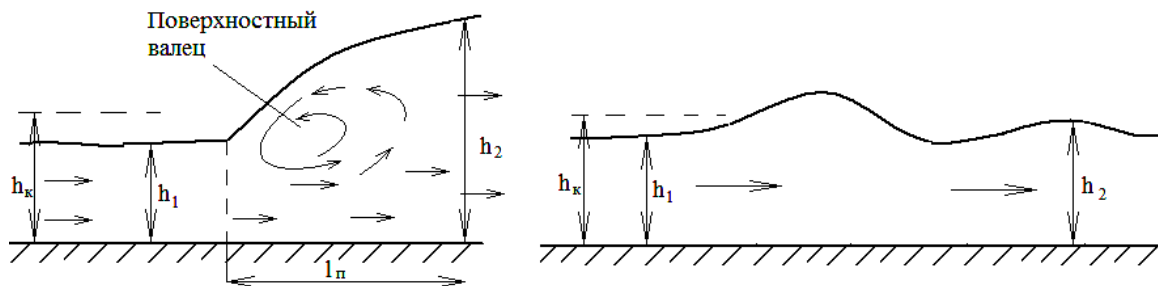


Рис.1. Схема гидравлического прыжка

Материал и методы исследования. Используя систему дифференциальных уравнений, описывающих нестационарный режим течения водного потока, в зоне прыжкового сопряжения и

предварительно произведя необходимые подстановки, получим нелинейное уравнение локальной нестационарности (1).

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial (v_c \cdot \Omega)}{\partial t} + \frac{q^2}{g \cdot h_2} - \frac{q^2}{g \cdot h_1} + \frac{h^2_2 - h^2_1}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = q_1 - q_2$$

где h_1, h_2 – соответственно величина первой и второй сопряженных глубин, q_1, q_2 – соответственно величины удельного расхода в зонах первой и второй сопряженных глубин, V_c – скорость центра массы объема, Ω – площадь боковой поверхности гидравлического прыжка при аппроксимации продольного профиля в виде квадратичной параболы.

Результаты исследования. Рассмотрим основную систему дифференциальных уравнений нестационарного режима движения водного потока в зоне прыжкового сопряжения приведенную в [4,5] представив ее в безразмерном виде разделив

на длину прыжка l и $\sqrt{\frac{l}{g}}$:

$$\frac{l^2}{3g \cdot h_2} \cdot \frac{d\left(\frac{h_2 dh_2}{dt}\right)}{dt} + \frac{q_2^2}{g \cdot h_2} - \frac{q_1^2}{q \cdot h_1} + (h_2^2 - h_1^2) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{2l}{3} \cdot \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (3)$$

где q – удельный расход; h_1 и h_2 – соответственно, первая и вторая сопряженные глубины; h'_2 – осредненное значение второй сопряженной глубины, l – длина гидравлического прыжка.

Выразим: $q_2 = q_1 - \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{dh_2}{dt}$, подставим это выражение в уравнение (1), раскрыв скобки, получим:

$$\frac{l^2}{3gh'_2} \cdot \frac{d\left(\frac{h_2 dh_2}{dt}\right)}{dt} - \frac{4}{3} l \cdot q_1 / (gh_2) \frac{dh_2}{dt} + \frac{4}{9} l^2 / (q \cdot h_2) \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 + \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2} = 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{l^2 h_2}{3gh'_2} \frac{d^2 h}{dt^2} + q_1^2 / (gh_2) - \frac{4}{3} l \cdot q_1 / (gh_2) \frac{dh_2}{dt} + \frac{4}{9} l^2 (gh_2) \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 - \frac{q_1}{gh_1} + \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2} = 0$$

$$\frac{q_1}{gh_1} + \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2} = 0 \quad (5)$$

Разделим почленно уравнение (5) на $\frac{l^2 h_2}{3gh'_2}$, получим:

$$\frac{d^2 h_2}{dt^2} + \frac{3gh'_2}{l^2 h_2} \frac{q_1^2}{gh_2} - \frac{4}{3} \frac{gh'_2}{l^2 h_2} \frac{3lq_1}{gh_2} \frac{dh_2}{dt} + \frac{4}{9} \frac{gh'_2}{l^2 h_2} \frac{3l^2}{gh_2} \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 - \frac{3gh'_2}{l^2 h_2} \frac{q_1}{gh_1} + \frac{3gh'_2}{l^2 h_2} \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2} = 0$$

(6)

После проведения необходимых сокращений в уравнении (6), получим:

$$\frac{d^2 h_2}{dt^2} + \frac{3h'_2}{l^2 h_2^2} q_1^2 - \frac{4h'_2}{lh_2^2} q_1 \frac{dh_2}{dt} + \frac{4}{3} \frac{h'_2}{h_2^2} \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 - \frac{3h'_2}{l^2 h_2 h_1} q_1^2 + \frac{3gh'_2}{l^2 h_2} \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2} = 0 \quad (7)$$

В уравнении (7), $h^3_{kp} = \frac{q_1^2}{g}$, тогда получим следующее выражение:

$$\frac{d^2 h_2}{dt^2} + \frac{3gh'_2}{l^2 h_2^2} h^3_{kp} - \frac{4q_1 h'_2}{l^2 h_2} \frac{dh_2}{dt} + \frac{4}{3} \frac{h'_2}{h_2^2} \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 - \frac{3gh'_2}{l^2 h_2 h_1} h^3_{kp} + \frac{4}{3} \frac{h'_2}{h_2^2} \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 - \frac{3gh'_2}{l^2 h_2} h^3_{kp} +$$

$$+ \frac{3gh'_2}{l^2 h_2^2} \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2} = 0 \quad (8)$$

При $h_2 = h'_2 + \zeta$, перепишем выражение (8).

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{3g \cdot h^3_{kp}}{l^2 \cdot h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} - \frac{4q_1}{l \cdot h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \frac{4}{3h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - \frac{3g \cdot h^3_{kp}}{l^2 \cdot h_1} + \\ + \frac{3g}{l^2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)} \cdot \left(\frac{h'^2_2 + 2h'_2 \cdot \zeta + \zeta^2 - h^2_1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

В уравнении (9) примем длину гидравлического прыжка равной трем значениям второй сопряженной глубине $l = 3h'_2$, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{3g \cdot h^3_{kp}}{9h'^2_2 \cdot h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} - \frac{4q_1}{3h'^2_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \frac{4}{3h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - \frac{3g \cdot h^3_{kp}}{9h'^2_2 \cdot h_1} + \\ + \frac{3g}{9h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)} \cdot \frac{(h'^2_2 + 2h'_2 \cdot \zeta + \zeta^2 - h^2_1)}{2} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) приведем к безразмерному виду разделив, почленно на h'_2 и $\sqrt{\frac{h'_2}{g}}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{3g \cdot h^3_{kp}}{9h'^2_2 \cdot h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} - \frac{4q_1}{3h'^2_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \frac{4}{3h'_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)^2} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - \frac{h^3_{kp}}{3h'_2 \cdot h_1} + \\ + \frac{1}{3h'^2_2 \cdot \left(1 + \frac{\zeta}{h'_2}\right)} \cdot \left(\frac{h'^2_2}{2} + h'_2 \cdot \zeta + \frac{\zeta^2}{2} - \frac{h^2_1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Избавимся от рациональности, произведя необходимые разложения, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{h^3_{kp}}{3h'^3_2} \cdot \left(\left(1 - \frac{\zeta}{3h'_2}\right) + \frac{\zeta^2}{24h'^2_2}\right) - \frac{4h'^{3/2}_{kp}}{3h'^{3/2}_2} \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{3h'_2}\right) + \frac{\zeta^2}{24h'^2_2} \cdot \frac{d\zeta}{dt} - \frac{h^3_{kp}}{3h'^2_2 \cdot h_1} + \frac{1}{3h'^2_2} \cdot \\ \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{h'_2} + \frac{\zeta^2}{24h'^2_2}\right) \cdot \left(\frac{h'^2_2}{2} + h'_2 \cdot \zeta + \frac{\zeta^2}{2} - h^2_1\right) + \frac{4}{3h'_2} \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{3h'_2} + \frac{\zeta^2}{24h'^2_2}\right) \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{h^3_{kp}}{3h^{13}_2} - \frac{\zeta \cdot h^3_{kp}}{9h^{14}_2} + \frac{\zeta^2 \cdot h^3_{kp}}{72h^{15}_2} - \left(\frac{4h^{3/2}_{kp}}{3h^{3/2}_2} - \frac{4\zeta \cdot h^{3/2}_{kp}}{9h^{5/2}_2} + \frac{\zeta^2 h^{3/2}_{kp}}{18h^{7/2}_2} \right) \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \left(\frac{4}{3h'_2} - \frac{4\zeta}{9h'^2_2} + \frac{\zeta^2}{18h'^3_2} \right) \\ & \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 - \frac{h^3_{kp}}{3h'^2_2 h_1} + \frac{h'^2_2}{6h'^2_2} + \frac{h'_2 \cdot \zeta}{3h'^2_2} + \frac{\zeta^2}{6h'^2_2} - \frac{h^2_1}{6h'^2_2} - \frac{\zeta \cdot h'^2_2}{18h'^3_2} - \frac{\zeta^2 \cdot h'_2}{9h'^3_2} - \frac{\zeta^3}{18h'^3_2} + \frac{\zeta \cdot h^2_1}{18h'^3_2} + \frac{\zeta^2 \cdot h'^2_2}{12h'^4_2} + \\ & + \frac{\zeta^3 \cdot h'_2}{6h'^4_2} + \frac{\zeta^4}{12h'^4_2} - \frac{\zeta^2 h^2_1}{12h'^4_2} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Исходя из условий не возмущений в уравнении (13) исключим члены

$$\frac{h^3_{kp}}{3h^{13}_2}; \frac{h^3_{kp}}{3h'^2_2 \cdot h_1}; \frac{h'^2_2}{6h'_2}; \frac{h^2_1}{6h'^2_2}.$$

Решение полученного уравнения будем проводить методом малого параметра [6,7,8,9,10]. Примем за малый параметр $\mu = \frac{1}{h^2}$ [4], тогда уравнение (13) переписывается:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \mu^4 \cdot \frac{h^3_{kp}}{9\zeta} + \mu^5 \cdot \left(\frac{h^3_{kp}}{72} \right) \zeta^2 - \mu^{3/2} \cdot \frac{4h^{3/2}_{kp}}{3} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \mu^{5/2} \cdot \frac{4h^{3/2}_{kp}}{9} \cdot \zeta \cdot \frac{d\zeta}{dt} - \mu^{7/2} \cdot \frac{h^{3/2}_{kp}}{18} \cdot \zeta^2 \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \\ & + \mu^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \zeta^2 - \mu^2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \zeta - \mu^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \zeta^2 - \mu^3 \cdot \frac{1}{18} \cdot \zeta^3 + \mu^3 \cdot \frac{h^2_1}{18} \cdot \zeta + \mu^2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \zeta^2 + \mu^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \zeta^3 + \\ & + \mu^4 \cdot \frac{1}{12} \cdot \zeta^4 - \mu^4 \cdot \frac{h^2_1}{12} \cdot \zeta^2 + \mu \cdot \frac{1}{3} \cdot \zeta = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

После проведения необходимых алгебраических преобразований в уравнении (14), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \mu^{3/2} \cdot \frac{4h^{3/2}_{kp}}{3} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \mu \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 - \mu^2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \zeta \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 + \mu^2 \cdot \frac{5}{36} \cdot \zeta^2 - \mu^2 \cdot \frac{\zeta}{18} + \mu \cdot \frac{\zeta}{3} = 0 \\ & \text{или} \\ & \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \mu^2 \cdot \frac{4\zeta}{9} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 - \zeta^2 \cdot \frac{5}{36} + \frac{\zeta}{18} - \mu^{3/2} \cdot \frac{4h^{3/2}_{kp}}{3} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \mu \cdot \left(\frac{\zeta}{3} + 4 \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнение (15) описывает стационарные нелинейные колебания в нижнем бьефе.

Выводы

Полученное нелинейное уравнение описывает протекающий колебательный процесс в открытом водном потоке нижнего бьефа гидротехнического сооружения для случая сопряжения бьефов в виде гидравлического прыжка. Полученное уравнение позволяет определять параметры нелинейных колебаний (амплитуда волны, частота колебаний, длина волны) возникающих в нижнем бьефе при установившемся режиме течения потока. Результаты вычислений позволяют осуществить коррекцию геометрических размеров гасителей энергии водного потока в нижнем бьефе гидротехнических сооружений.

Список литературы

1. Гунько Ф.Г. Классификация форм сопряжения бьефов в пространственных условиях для случаев плотин с уступом при гладком водобое

и без уступа при наличии водобойной стенки. Изв. ВНИИГ им. Веденеева, Л., 1962, т.71, С.39.59.

2. Грушевский М. С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах. - Л.: Гидрометеиздат, 1982. - 288 с.

3. Кюнж Ж. А., Холли Ф. М., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 256 с.

4. Земляникова М.В. Фартуков В.А. «Обобщенные нелинейные уравнения локальной нестационарности». Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции «Экологическая устойчивость природных систем и роль природообустройства в ее обеспечении», М. 2003, стр.136-137.

5. Земляникова М.В. Фартуков В.А. «Уравнения локальной нестационарности при прыжковых сопряжениях». Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции

«Экологическая устойчивость природных систем и роль природообустройства в ее обеспечении», М. 2003, стр. 137-138.

6. Найфэ А.Ю. Методы возмущений, М., 1976.

7. Моисеев Н.Н. «Асимптотические методы нелинейной механики» М.: Наука, 1969.

8. Кузьмина Р.П. «Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений». М.: Едиториал УРСС, 2003.

9. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. «Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей». Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ РОЛИКА В ПРОЦЕССЕ ПЛАЗМЕННОЙ НАПЛАВКИ

Шестаков Н.И.,

доктор технических наук, профессор ЧГУ,
г. Череповец, РФ

Журавлева Ю.М.,

аспирантка ЧГУ,
г. Череповец, РФ

Шестакова Е.А.,

кандидат технических наук, доцент ЧГУ,
г. Череповец, РФ

Никонова Е. Л.,

кандидат технических наук, доцент ЧГУ,
г. Череповец, РФ

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2022.1.101.1678

АННОТАЦИЯ

Исследованы процессы теплообмена при плазменной наплавке металла на поверхность роликов. Даны рекомендации по устранению дефектов.

Ключевые слова: Плазменная наплавка металла, ролик, теплообмен

Плазменная наплавка используется при восстановлении изношенных деталей, а также для изготовления новых.

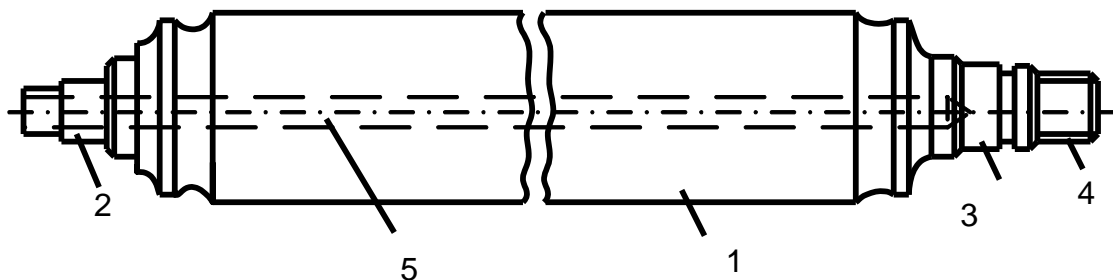


Рисунок 1. Схема ролика: 1 - бочка, 2, 3 - шейка (цапфа), 4 - торец, 5 - отверстие для внутреннего охлаждения ролика.

Ролик вращается с угловой скоростью ω .

В лабораторной системе координат (неподвижной относительно вращающейся детали) теплообмен в основном и наплавленном слое опишется уравнением

$$c_i(T)\rho_i(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}[\lambda_i(T)\text{grad}T], i = 1, 2, \tau \geq 0, (1)$$

где c - удельная массовая теплоемкость; ρ - плотность; λ - коэффициент теплопроводности; T - температура; τ - время.

Уравнение (1) записано для двух зон:

$$\left. \begin{array}{l} R_0 < r_1' < R_1 \\ R_1 < r_2' < R_2 \end{array} \right\} 0 \leq \varphi' \leq 2\pi; 0 \leq z' \leq 2L. (2)$$