

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 504; 514; 551.4

## ВЕЛИЧИНЫ ГЕОМОРФОМЕТРИИ, ИХ СМЫСЛ И ПРИМЕНЕНИЕ

*Петр Александрович Шарый*

*Институт физико-химических и биологических проблем почвоведения РАН,  
142292 г. Пушкино Московской области. ул. Институтская д.2.*

### VARIABLES OF GEOMORPHOMETRY, THEIR MEANING AND APPLICATIONS

*Peter A. Shary*

*Institute of physicochemical and biological problems in soil science RAS,  
142292 Pushchino Moscow region, Institutskaya Str. bldg. 2*

*DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2022.1.99.1673*

#### АННОТАЦИЯ

Рассмотрены методы количественного анализа рельефа. Выведены формулы морфометрических величин (МВ), выражающихся через первые и вторые производные гладкой поверхности  $S$ . Эти МВ могут описывать свойства потоков в гравитационном поле (системы «поверхность + векторное поле») или свойства самой  $S$ . Установлен смысл каждой МВ. Кратко обсуждены широко распространенные подходы к использованию МВ и иных факторов среды для изучения других характеристик ландшафта (почв, растительности), специфика МВ для оценки теплового и светового режима склонов, а также роль масштаба.

#### ABSTRACT

Methods of quantitative land surface analysis are considered. Formulae of morphometric variables (MVs) are deduced that depend on first and second derivatives of a smooth surface  $S$ . These MVs can describe properties of flows in gravitational field (the system “surface + vector field”) or of  $S$  itself. The meaning of each MV is established. Widely known approaches are shortly described of how to use MVs and other environmental factors for studying other landscape features (of soil, vegetation), specifics of MVs for evaluating thermal and light regimes of slopes, the role of a scale.

**Ключевые слова:** геоморфометрия, морфометрические величины, земная поверхность, предсказательное картирование, масштаб

#### Введение

Под геоморфометрией понимают науку о количественном анализе земной поверхности [16, 36, 29]. Результаты дифференциальной геометрии поверхностей здесь не всегда применимы, поскольку многие величины геоморфометрии описываются в терминах изолиний высоты (горизонталей) и характеристик потоков (линий тока) веществ, движущихся по земной поверхности под действием силы тяжести. Другими словами, объектом изучения в геоморфометрии является двойная система «поверхность + векторное поле»,

где обычно учитываемые векторные поля есть гравитационное поле или поле солнечного излучения [34]. Понятия геоморфометрии не всегда достаточно известны, а опубликованные формулы часто содержат ошибки. Поэтому в настоящей работе дается вывод формул основных локальных морфометрических величин (МВ).

Сама форма поверхности выделяет на ней два направления – с наибольшей и наименьшей кривизной. Гравитационное поле выделяет два других направления – вниз по склону и вдоль изолинии высоты, рис. 1.

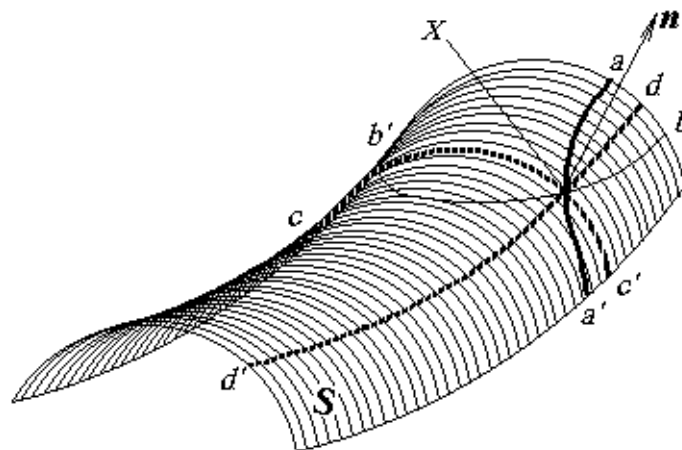


Рис.1. Четыре направления, выделяемые в точке  $X$  поверхности  $S$  ее формой (с максимальной кривизной  $cc'$  и с минимальной кривизной  $dd'$ ) и гравитационным полем (вниз по склону  $aa'$  и вдоль изолинии высоты  $bb'$ ). Вектор нормали к поверхности в точке  $X$  обозначен как  $n$ .

Нормальным сечением  $S$  в точке  $X$  называется [5] кривая, получающаяся от пересечения проходящей через нормаль  $n$  плоскости с поверхностью  $S$ .

В дифференциальной геометрии поверхностей [2, 5] изучаются только направления, выделяемые самой поверхностью, и связанные с ними величины (кривизны). В геоморфометрии изучаются МВ, связанные также и с гравитационным полем и выделяемым им направлениями. Поэтому геоморфометрия не является частью дифференциальной геометрии поверхностей. При рассмотрении векторного поля солнечного излучения вводятся другие МВ, связанные с этим полем и земной поверхностью.

В настоящей работе представлены основные количественные результаты, относящиеся к описанию системы «поверхность + векторное поле» на локальном уровне. Особое внимание уделяется смыслу морфометрических величин. Тень от холма (она может простирается до

горизонта) является одним из примеров нелокальных понятий. Был предложен ряд МВ, зависящих от третьих производных высоты по плановым координатам [20, 25], но их смысл изучен пока недостаточно, в то время как они очень чувствительны к ошибкам в данных [34]. Здесь функции третьих производных и нелокальные подходы не рассматриваются.

### 1. Два механизма аккумуляции

Потоки веществ, движущихся под действием силы тяжести по земной поверхности, могут аккумулироваться в определенных местах не только по причинам задержки их растительностью или труднопроходимыми участками местности (торфяниками и т.п.), но и потому, что предпосылки для этого им создает рельеф. В геоморфометрии интерес прежде всего к последним. Например, линии тока, по которым обычно течет вода, могут сближаться в одних участках местности и расходиться в других, рис. 2А.

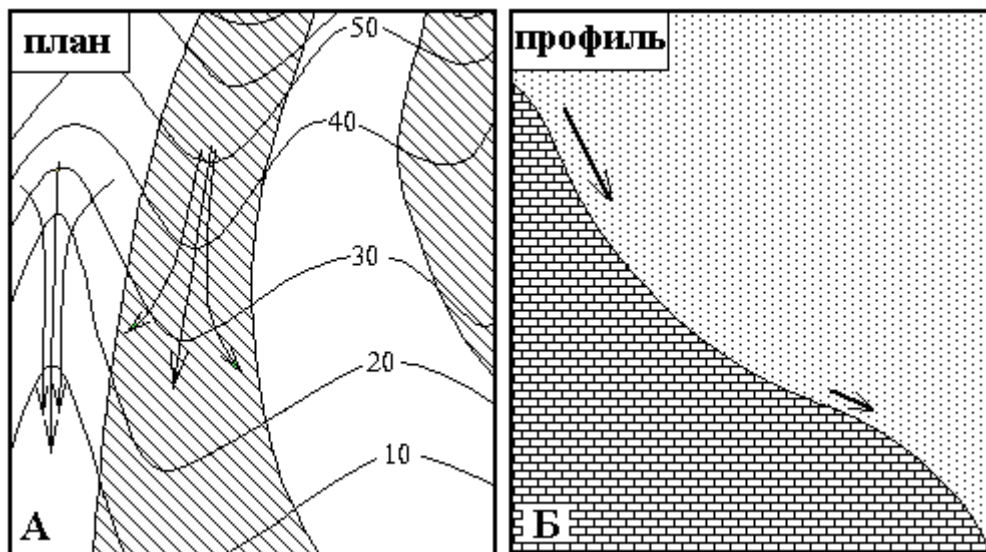


Рис.2. А – первый механизм аккумуляции. Кривые с цифрами есть горизонталь (изолинии высоты), кривые со стрелками – линии тока. Области конвергенции (сближения потоков) показаны белым, области дивергенции заштрихованы. Б – второй механизм аккумуляции. Показан разрез профиля склона. Грунт заштрихован. В верхней части вогнутого профиля частицы движутся быстрее из-за большей крутизны (показанной длиной стрелки), в нижней – медленнее, «наползая» на лежащие ниже по склону частицы и формируя этим 2-й механизм.

Эти два механизма, очерченные пока качественно, можно описать, как показано ниже, знаками соответствующих МВ, но этих МВ нет в дифференциальной геометрии поверхностей, поскольку они описываются в терминах формируемых гравитационным полем потоков.

### 2. Крутизна склонов

Здесь и ниже принимается модель гладкой поверхности  $S$ , описываемой однозначной дважды непрерывно дифференцируемой функцией  $z = f(x, y)$ , представляющей высоту этой поверхности  $z$

как функцию плановых координат  $x, y$ . Будем также считать, что гравитационное поле однородно и вектор ускорения притяжения  $g$  направлен параллельно оси  $z$  в сторону уменьшения высоты, то есть  $g = -gk$ , где  $g$  есть ускорение тяготения, а  $i, j, k$  обозначают орты осей декартовой системы координат  $x, y, z$ . Предположение об однородности гравитационного поля выполняется для достаточно малого участка геоида [22], эквипотенциальную поверхность которого можно рассматривать как плоскую.

Движение веществ по поверхности  $S$  происходит в гравитационном поле под действием тангенциальной составляющей силы тяжести. Не рассматривая само это движение, мы хотим определить лишь направление и величину этой составляющей, которую обозначим как  $g_t$ . Пусть  $n$  есть единичный вектор внешней нормали к  $S$  в лежащей на  $S$  точке  $r_0$ . Тогда уравнение

касательной плоскости в  $r_0$  к  $S$  дается скалярным произведением  $(r - r_0, n) = 0$  [1].

Отложив из точки  $r_0$  вектор  $g$ , получаем положение его конца в точке  $r_0 + g$ ; расстояние от этой точки до касательной плоскости есть  $|(r_0 + g - r_0, n)| = |(n, g)|$  [1]. Разложим вектор  $g$  на тангенциальную  $g_t$  и нормальную  $g_n$  составляющие, рис. 3.

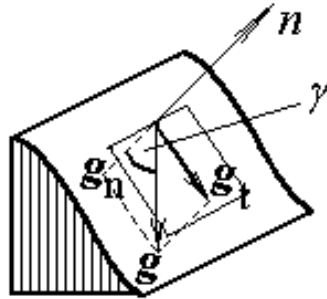


Рис.3. Схема разложения вектора ускорения притяжения  $g$  на тангенциальную  $g_t$  и нормальную  $g_n$  составляющие.

Из  $g = g_t + g_n$  находим, что  $g_t = g - g_n$ , но  $|g_n|$  есть расстояние  $|(n, g)| = (-n, g)$ . Направление  $g_n$  совпадает с  $-n$ , поэтому  $g_n = n(n, g)$  и

$$g_t = g - n(n, g), (2.1)$$

причем отметим неравенство

$$(n, g) < 0. (2.2)$$

Смысл этого неравенства состоит в том, что угол между  $n$  и  $g$  есть тупой угол, то есть оно описывает принимаемое нами «топологическое ограничение»: не рассматриваются пещеры, нависающие скалы и бесконечно крутые склоны.

Примем обозначения для частных производных:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. (2.3)$$

В однородном поле  $g = -gk$  с учетом выражения для единичного вектора внешней нормали к  $S$  [4, §7.24]

$$n = \frac{-pi - qj + k}{\sqrt{1+p^2+q^2}} (2.4)$$

легко убедиться, что условие (2.2) выполнено:  $(n, g) = -g/\sqrt{1+p^2+q^2} < 0$ . Величина  $g_t$  есть

$$g_t = -g \frac{pi + qj + (p^2 + q^2)k}{1 + p^2 + q^2}, (2.5)$$

как это следует из  $g = -gk$ , (2.1) и (2.4). Отметим еще, что в однородном поле

$$\cos \gamma = \left( -n, \frac{g}{g} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{1+p^2+q^2}}, (2.6)$$

$$tg \gamma = \sqrt{p^2 + q^2},$$

где  $\gamma$  есть угол между  $k$  и  $n$  (рис. 3). Этот угол и есть выраженная в градусах крутизна склонов. Безразмерная крутизна  $G$  есть

$$G = tg \gamma = \sqrt{p^2 + q^2}; (2.7)$$

крутизна в градусах есть

$$GA = arctg \sqrt{p^2 + q^2}. (2.8)$$

Из (2.5) и (2.6) следует  $|g_t| = g \sin \gamma$ , то есть тангенциальная составляющая силы тяжести пропорциональна не крутизне склонов  $G$  или  $GA$ , а фактору крутизны  $GF$ :

$$GF = \frac{|g_t|}{g} = \sin \gamma = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} (2.9)$$

Из (2.7) и (2.9) находим, что

$$GF = \frac{G}{\sqrt{1+G^2}}. (2.10)$$

### 3. Особые точки

В однородном поле горизонталь есть множество точек пересечения поверхности  $S$  и горизонтальной плоскости, то есть она описывается уравнением

$$z(x, y) = const (3.1)$$

и является плоской кривой. Уточним, однако, что понимается под кривой. Обычная кривая есть участок горизонтали, для которого существует однозначное и единственное решение (3.1) вида  $y = y(x)$  или  $x = x(y)$  в некоторой окрестности каждой точки. Достаточное условие того, чтобы горизонталь (3.1) была такой кривой, можно получить из теорем о неявных функциях [4, §7.16].

Эти условия (именно:  $p$  и  $q$  не равны нулю одновременно) можно записать как

$$G = \sqrt{p^2 + q^2} > 0. (3.2)$$

Обозначим множество *особых точек*  $(x, y)$  как  $O$ , для которых

$$G = \sqrt{p^2 + q^2} = 0. (3.3)$$

Поведение горизонталей близ особых точек в  $n$ -мерном случае изучалось в [31].

Для множества  $N$  *неособых точек* выполняется неравенство (3.2). Горизонталь в неособых точках является обычной кривой. В особых точках горизонталь может не быть кривой в обычном, определенном выше смысле. Например, это может быть изолированная точка (вершина холма или дно ямы), абсолютно горизонтальная площадка или точка излома горизонтали. Ниже показано, что не все локальные морфометрические величины могут быть определены в особых точках.

Редко или часто располагаются особые точки в пространстве? Пусть  $P$  есть открытый прямоугольник с параллельными осям  $x$  и  $y$  ребрами, и  $\bar{P}$  есть его замыкание. Пусть также  $Q$  есть прямоугольник с параллельными осям  $x$  и  $y$  ребрами, такой что  $Q$  содержит  $\bar{P}$ . Обозначим теперь множество всех неособых точек  $Q$  как  $N_Q$ , и пусть  $\bar{O} = \bar{P} \setminus N_Q$  есть множество всех особых точек  $\bar{P}$ . Справедлива следующая

**Теорема 1.** [7]. Множество  $N$  неособых точек открыто, а множество  $\bar{O}$  особых точек замкнуто.

**Доказательство.** Для первой части оно вытекает из непрерывности функции  $G = \sqrt{p^2 + q^2}$ . Если точка  $(x, y) \in Q$  является неособой (то есть  $G > 0$ ), то вследствие непрерывности  $G$  все точки некоторой ее окрестности принадлежат  $N_Q$ , но тогда  $N_Q$  состоит только из внутренних точек, то есть является открытым множеством. Пересечение  $N_Q$  и  $P$  есть пересечение двух открытых множеств, а значит открытое множество. С другой стороны, оно является подмножеством неособых точек  $P$ , то есть множества  $N$ .

Доказательство второй части следует из определения  $\bar{O}$  как разности между замкнутым множеством  $\bar{P}$  и открытым множеством  $N_Q$ . Следовательно,  $\bar{O}$  есть замкнутое множество. Теорема доказана.

Замкнутость  $\bar{O}$  характеризует сравнительно редкую встречаемость особых точек. Обычно это изолированные точки (вершины холмов и донья ям) или идеально горизонтальные площадки, которые могут встречаться, например, как артефакты при округлении значений высот в цифровых моделях рельефа в виде матриц. Точки  $N$  названы неособыми потому, что на  $N$  горизонталь есть обычная кривая. В особых точках  $O$  горизонталь может не быть кривой в обычном (определенном выше) смысле. Ниже показано, что не все локальные МВ определены в особых точках.

#### 4. Линии скольжения и линии тока

Линия скольжения есть кривая (определенная на  $N$ ) на поверхности  $S$ , в каждой точке которой направление касательной к ней совпадает с направлением тангенциальной компоненты вектора ускорения притяжения  $g_t$  [15]. Линия тока есть проекция линии скольжения на горизонтальную плоскость. В особых точках  $g_t = 0$  (поскольку  $p = q = 0$ ), поэтому направление  $g_t$  не определено. Линии скольжения направлены вниз по склону, поскольку  $z$ -компонента  $g_t$  отрицательна на  $N$ .

При изучении свойств поверхности, не зависящих от гравитации, в дифференциальной геометрии поверхностей [2, 5] вводилась ортогональная сетка линий кривизны (геодезических линий). Подобным образом, для системы «поверхность + гравитация» возникает другая ортогональная сетка: линий скольжения (или линий тока) и горизонталей. Докажем, что эти две системы линий в неособых точках также взаимно перпендикулярны.

Единичный вектор касательной к линии скольжения есть

$$r'_\eta = \frac{dx}{d\eta} i + \frac{dy}{d\eta} j + \frac{dz}{d\eta} k, (4.1)$$

где  $\eta$  есть длина линии скольжения, и, поскольку этот вектор единичный, то

$$\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 = 1. (4.2)$$

Поскольку  $|g_t| = g \sin \gamma$ , из (2.5) находим, что на  $N$

$$r'_\eta = -\frac{pi+qj+(p^2+q^2)k}{\sqrt{(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)}} (4.3)$$

**Теорема 2.** [7]. На множестве  $N$  неособых точек горизонталь перпендикулярна линии скольжения в точке их пересечения. Горизонталь и линия тока также взаимно перпендикулярны на  $N$ .

**Доказательство.** Для первой части теоремы достаточно доказать, что на  $N$   $(r'_\eta, r'_\xi) = 0$ , где  $\xi$  есть длина горизонтали, а  $r'_\xi$  есть единичный вектор касательной к горизонтали. Беря производную горизонтали (уравнения  $z(x, y) = \text{const}$ ) по  $\xi$  и замечая, что для плоской кривой формула (4.2) есть  $\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 = 1$ , находим  $p \frac{dx}{d\xi} + q \frac{dy}{d\xi} = 0$ . Отсюда следует, что на  $N$

$$r'_\xi = \pm \frac{-qi+pj}{\sqrt{p^2+q^2}} (4.4)$$

где знак определяется ориентацией горизонтали. Отсюда и из (4.3) следует равенство  $(r'_\eta, r'_\xi) = 0$ , и первая часть теоремы доказана.

Используя (4.3) и обозначая длину линии тока как  $\sigma$ , находим выражение для вектора касательной  $r'_\sigma$  к линии тока (плоской кривой) на  $N$ :

$$r'_\sigma = -\frac{pi+qj}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) следует  $(r'_\sigma, r'_\xi) = 0$ . Поэтому линии тока перпендикулярны горизонталям на  $N$ . Теорема доказана.

Теперь покажем, что в неособых точках направление максимального уменьшения высоты есть направление линии тока. Действительно, на  $N$  производная по направлению единичного вектора  $m$  есть  $\left| \frac{\partial z}{\partial m} \right| = |(\nabla z, m)| \leq |\nabla z| = \sqrt{p^2 + q^2}$ , где  $\nabla z$  есть двумерный вектор градиента,  $\nabla z = pi + qj$ . Следовательно, направление  $-\nabla z$  дает максимальное уменьшение высоты среди всех возможных направлений. Но согласно (4.5), это есть направление  $r'_\sigma$  вдоль линий тока. Отметим, что количественной мерой этого уменьшения высоты является безразмерная крутизна  $G = \sqrt{p^2 + q^2}$ .

### 5. Экспозиция и освещенность

Взятый со знаком минус двумерный вектор градиента  $-\nabla z$  определяет как крутизну склонов  $G$ , так и экспозицию  $A_0$ . Экспозиция определяется как угол между направлением на север  $j$  и направлением  $-\nabla z$ , отсчитанным по часовой стрелке, от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  (вектора осей координат  $i, j$  и  $k$  направлены на восток, север и вверх соответственно).

Единичный вектор касательной к линии тока  $-\nabla z/|\nabla z|$  есть  $r'_\sigma$ . На  $N$  скалярное произведение  $(r'_\sigma, j)$  есть косинус угла  $A_0$  между  $r'_\sigma$  и  $j$ :

$$A_0 = -90[1 - \text{sign}(q)](1 - |\text{sign}(p)|) + 180[1 + \text{sign}(p)] - \frac{180}{\pi} \text{sign}(p) \arccos\left(\frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) \quad (5.3)$$

Синус  $A_0$  можно вывести как  $z$ -компоненту векторного произведения  $[r'_\sigma, j]$ :

$$[r'_\sigma, j]_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}} & \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

так что

$$\cos A_0 = (r'_\sigma, j) = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad (5.1)$$

Учитывая, что неравенство  $q > 0$  относится к южным склонам ( $90^\circ < A_0 \leq 180^\circ$  при  $p \leq 0$ ,  $180^\circ < A_0 < 270^\circ$  при  $p > 0$ ),  $A_0 = 90^\circ$  ( $p < 0$ ) или  $A_0 = 270^\circ$  ( $p > 0$ ) при  $q = 0$ , а неравенство  $q < 0$  относится к северным склонам ( $0^\circ < A_0 < 90^\circ$  при  $p < 0$ ,  $270^\circ < A_0 < 360^\circ$  при  $p > 0$ ), находим для  $N$ :

$$A_0 = 0 + \frac{180}{\pi} \arccos\left(\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \text{ при } p \leq 0, q < 0,$$

$$A_0 = 90 + \frac{180}{\pi} \arccos\left(\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \text{ при } p \leq 0, q \geq 0,$$

$$A_0 = 180 + \frac{180}{\pi} \arccos\left(\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \text{ при } p > 0, q \geq 0,$$

$$A_0 = 270 + \frac{180}{\pi} \arccos\left(\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \text{ при } p > 0, q < 0,$$

где  $\arccos(\cdot)$  дан в радианах.

Теперь можно, используя функцию

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

преобразовать эти формулы в единую, справедливую на  $N$ , формулу:

$$\sin A_0 = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad (5.4)$$

**Освещенность склонов**  $F(\theta, \psi)$  определяется как доля (в %) от максимальной прямой солнечной радиации [35] при угловых положениях Солнца, определяемых двумя углами: азимутом Солнца  $\theta$  и склонением Солнца от горизонта  $\psi$ , рис. 4.

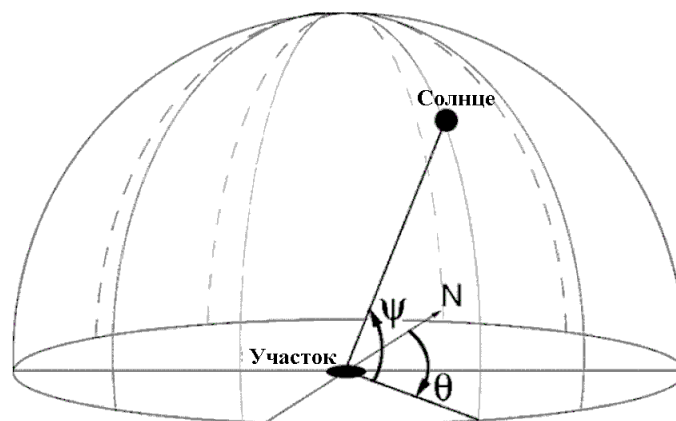


Рис. 4. Определяющие положение Солнца углы.

Единичный вектор на Солнце от данной точки на поверхности  $S$  есть  $m = i \sin \theta \cos \psi + j \cos \theta \cos \psi + k \sin \psi$ .

Доля от максимальной интенсивности солнечной радиации есть косинус угла между  $m$  и единичным вектором  $n$  нормали к  $S$ , то есть она равна  $(m, n)$  если этот угол меньше  $90^\circ$  и нулю в противоположном случае (тенева сторона холма). Неравенство  $(m, n) > 0$  отвечает этому углу меньше  $90^\circ$ , так что эта доля есть  $(m, n)[1 + \text{sign}(m, n)]/2$ . Отсюда следует, что освещенность

$$F(\theta, \psi) = 50(m, n)[1 + \text{sign}(m, n)]. \quad (5.5)$$

Теперь находим из выражения для  $m$  и (2.4), что

$$(m, n) = \frac{\sin \psi - \cos \psi (p \sin \theta + q \cos \theta)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \quad (5.6)$$

Подставляя это в (5.5), находим окончательно

$$50 \frac{F(\theta, \psi) = \frac{[1 + \text{sign}[\sin \psi - \cos \psi (p \sin \theta + q \cos \theta)]] [\sin \psi - \cos \psi (p \sin \theta + q \cos \theta)]}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{(5.7)}$$

$F(\theta, \psi)$  определена в любой точке поверхности.

Отметим, что освещенность здесь определена как локальная МВ, так что холмы могут иметь теневые стороны, но сами не отбрасывают теней, поскольку отбрасываемая тень есть нелокальное понятие. Интенсивность прямой солнечной радиации в ясный солнечный на перпендикулярную солнечным лучам поверхность в средних широтах есть  $\tau = 760 \text{ Вт/м}^2$  [3]. Таким образом, освещенность в энергетических единицах  $\tilde{F}(\theta, \psi)$  можно оценить с помощью следующего выражения:

$$\tilde{F}(\theta, \psi) = \tau \frac{F(\theta, \psi)}{100}. \quad (5.8)$$

## 6. Характеристики кривизны

Чтобы иметь гибкий математический инструмент для вывода той или иной кривизны, можно использовать общую формулу кривизны гладкой (не обязательно плоской) кривой [4, § 6.9]:

$$|r_\lambda''| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{d\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\lambda^2}\right)^2}, \quad (6.1)$$

где  $\lambda$  есть длина кривой, а  $r_\lambda''$  есть вторая производная вектора  $r$  по  $\lambda$ .

**Плановая кривизна**  $k_p$  есть наделенная знаком кривизна горизонтали [16, 22]. Подставляя длину горизонтали  $\xi$  (вместо  $\lambda$ ) в общую формулу (6.1), находим нужные для этой формулы производные. Из (4.4) следует, что на  $N$

$$\frac{dx}{d\xi} = \pm \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{dy}{d\xi} = \pm \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} u \quad (6.2)$$

$$\frac{dp}{d\xi} = r \frac{dx}{d\xi} + s \frac{dy}{d\xi} \frac{dq}{d\xi} = s \frac{dx}{d\xi} + t \frac{dy}{d\xi}. \quad (6.3)$$

Таким образом, на  $N$

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = -\frac{p}{(p^2+q^2)^2} (q^2r - 2pqs + p^2t), \quad (6.4)$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = -\frac{q}{(p^2+q^2)^2} (q^2r - 2pqs + p^2t). \quad (6.5)$$

Искомый вектор  $r_\xi'' = \frac{d^2x}{d\xi^2}i + \frac{d^2y}{d\xi^2}j$  есть поэтому  $r_\xi'' = -k_p r_\sigma'$  на  $N$ , где  $r_\sigma'$  есть единичный вектор касательный к линии тока, определенный формулой (4.5), и на  $N$

$$k_p = -\frac{q^2r - 2pqs + p^2t}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}}. \quad (6.6)$$

есть плановая кривизна.

Докажем, что плановая кривизна  $k_p$  есть количественная мера расхождения (дивергенции) и сближения (конвергенции) линий тока.

**Теорема 3.** [33]. На  $N$  дивергенция единичного касательного к линиям тока вектора  $r_\sigma'$  равна плановой кривизне  $k_p$ .

**Доказательство.** Рассчитывая дивергенцию  $\text{div} r_\sigma'$  с помощью формулы (4.5) и определения дивергенции  $\text{div} a = \partial a_x / \partial x + \partial a_y / \partial y$ , получаем на  $N$

$$\text{div} r_\sigma' = \frac{\partial \left( \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)}{\partial y} = k_p.$$

Теорема доказана.

Эта теорема обосновывает локальное описание первого механизма аккумуляции с помощью плановой кривизны  $k_p$ . Именно,  $k_p > 0$  в областях дивергенции (где линии тока расходятся, заштрихованные области на рис. 2А),  $k_p < 0$  в областях конвергенции (где линии тока сближаются, белые области на рис. 2А), а при  $k_p = 0$  линии тока параллельны.

**Горизонтальная кривизна**  $k_h$  есть кривизна нормального сечения, касательного к горизонтали [23, 7, 26]. Для вывода формулы  $k_h$  можно использовать теорему Менье [4, § 7.24]:

$$k_0 = k \cos \theta, \quad (6.7)$$

где  $k_0$  есть кривизна нормального сечения, проходящего через точку  $R$  на поверхности  $S$  и касательного к кривой  $\Gamma$ ,  $k$  есть кривизна  $|k| = |r_\lambda''|$  кривой  $\Gamma$ , принадлежащей  $S$  и проходящей через точку  $R$  на  $S$ ,  $\theta$  есть угол между вектором  $v = r_\lambda'' / |r_\lambda''|$  и нормалью  $n$  к  $S$  в точке  $R$ ,  $\cos \theta = (n, v)$ . Отсюда следует, что теорема Менье может быть записана как

$$k_0 = (n, r_\lambda''). \quad (6.8)$$

Рассматривая в качестве кривой  $\Gamma$  горизонталь (так что  $\lambda = \xi$ ) и используя формулы (2.4) и (2.6) для  $n$  и  $\sin \gamma$ , находим для  $N$ , что  $k_h = k_p \sin \gamma$ , где  $0 < \gamma < \pi/2$ , и, следовательно,

$$k_h = -\frac{q^2 r - 2pq s + p^2 t}{(p^2 + q^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad (6.9)$$

на  $N$ . Отметим, что знаки  $k_p$  и  $k_h$  в неособых точках совпадают, как видно из сравнения (6.6) и (6.9). Таким образом, линии тока сближаются при  $k_h < 0$  и расходятся при  $k_h > 0$ ; случай  $k_h = 0$  отвечает параллельным линиям тока.

В работе [24] показано, что в точках холма в виде полусферы радиуса  $R$  горизонтальная кривизна равна  $1/R$ , в то время как плановая кривизна равна  $1/r$ , где  $r$  есть радиус горизонтали, и стремится к бесконечности на вершине этого холма. Это делает неудобным использование плановой кривизны (ее статистики резко отличны от таковых горизонтальной кривизны), поэтому часто вместо нее используют горизонтальную кривизну. Последнюю также называют тангенциальной кривизной [26].

**Вертикальная кривизна**  $k_v$  есть кривизна нормального сечения, имеющего общую касательную с линией скольжения [22]. Согласно теореме 2, горизонталь и линии скольжения взаимно перпендикулярны, поэтому можно использовать теорему Эйлера [4, § 7.24], устанавливающую, что **средняя кривизна**  $H$  равна полусумме кривизн двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений. В частности,

$$H = \frac{1}{2}(k_h + k_v) \quad (6.10)$$

на  $N$ . Формула средней кривизны давно известна [2],

$$H = -\frac{(1+q^2)r - 2pq s + (1+p^2)t}{2\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} \quad (6.11)$$

причем она справедлива для любой точки  $S$ .

**Минимальная поверхность** есть поверхность с наименьшей площадью при заданной границе. Например, натянутая на неплоский проволочный контур мыльная пленка стремится уменьшить поверхность энергию, формируя (в пренебрежении силой тяжести) минимальную поверхность. После 130 лет усилий доказано, что  $H = 0$  во всех точках минимальной поверхности [6].

Подставляя формулы  $H$  и  $k_h$  в (6.10), находим, что на  $N$

$$k_v = -\frac{p^2 r + 2pq s + q^2 t}{(p^2 + q^2)\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} \quad (6.12)$$

Возникает естественный вопрос о том, как эта кривизна связана со вторым механизмом аккумуляции. Ответ дает следующая

**Теорема 4.** [33, 34]. На  $N$  вертикальная кривизна  $k_v$  равна производной фактора крутизны  $GF$  по длине линии тока  $\sigma$ .

**Доказательство.** На  $N$  первая производная высоты  $z$  по длине линии тока  $\sigma$  есть

$$\frac{dz}{d\sigma} = p \frac{dx}{d\sigma} + q \frac{dy}{d\sigma} = -\sqrt{p^2 + q^2} = -G,$$

где выражения для  $dx/d\sigma$  и  $dy/d\sigma$  взяты из (4.5). На  $N$  вторая производная высоты есть

$$\frac{d^2 z}{d\sigma^2} = -\frac{dG}{d\sigma} = -\frac{d\sqrt{p^2+q^2}}{d\sigma} = -k_v \sqrt{(1+p^2+q^2)^3}, \quad (6.13)$$

где использовалось, что

$$\frac{dp}{d\sigma} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{d\sigma} + \frac{dp}{dy} \frac{dy}{d\sigma} = r \frac{dx}{d\sigma} + s \frac{dy}{d\sigma} = \frac{dq}{dx} \frac{dx}{d\sigma} + \frac{dq}{dy} \frac{dy}{d\sigma} = s \frac{dx}{d\sigma} + t \frac{dy}{d\sigma},$$

а формулы для  $dx/d\sigma$  и  $dy/d\sigma$  взяты из (4.5).

Из (6.13) следует, что  $k_v = (dG/d\sigma)/\sqrt{(1+G^2)^3}$  на  $N$ . Замечая, что согласно (2.10) фактор крутизны  $GF = G/\sqrt{1+G^2}$ , находим, что на  $N$

$$\frac{d(GF)}{d\sigma} = \frac{\sqrt{1+G^2} \cdot \frac{dG}{d\sigma} - G^2}{1+G^2} \frac{dG}{d\sigma} = \frac{\frac{dG}{d\sigma}}{\sqrt{(1+G^2)^3}} = k_v,$$

то есть производная фактора крутизны по длине линии тока равна вертикальной кривизне. Теорема доказана.

Эта теорема дает основание для описания второго механизма аккумуляции вертикальной кривизной. Отрицательным  $k_v$  отвечают вогнутые в профиле склоны (поскольку  $d(GF)/d\sigma < 0$ ), которые аккумулируют потоки, перемещающихся под действием силы тяжести по земной поверхности (рис. 2Б), положительным  $k_v$  – выпуклые в профиле склоны;  $k_v = 0$  на прямых в профиле склонах.

Вертикальную кривизну часто называют также профильной кривизной. Отметим, что средняя кривизна  $H$ , согласно (6.10), как бы описывает оба механизма аккумуляции с равными «весами»  $1/2$ . Ясно, что в областях, где  $k_v$  и  $k_h$  обе отрицательны, отрицательна и  $H$ , а в областях с положительными  $k_v$  и  $k_h$  положительна и  $H$ , но в областях с разными знаками  $k_v$  и  $k_h$  знак средней кривизны может быть любым.

**Лапласиан высоты**  $\Delta z$  определен [4, § 7.26] как

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = r + t. \quad (6.14)$$

Интересно понять, как  $\Delta z$  связан с уже отмеченными кривизнами. Ответ на этот вопрос дает следующая

**Теорема 5.** [34].  $\Delta z \approx -2H$  при  $p, q \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Предельное значение  $H$  при  $p, q \rightarrow 0$  можно найти из формулы (6.11); оно равно  $-(r+t)/2$ . Отсюда,  $\Delta z = r + t \approx -2H$  при  $p, q \rightarrow 0$ . Теорема доказана.

Крутизна  $G = \sqrt{p^2 + q^2}$  стремится к нулю при  $p, q \rightarrow 0$ . Отсюда и из этой теоремы следует, что лапласиан  $\Delta z$  близок к  $-2H$  на пологих склонах (в точности равен нулю в особых точках).

**Полная гауссова кривизна**  $K$  определена Гауссом [2] как произведение минимальной

кривизны  $k_{\min}$  нормального сечения и максимальной  $k_{\max}$  кривизны нормального сечения в данной точке

$$K = k_{\max \min}. (6.15)$$

ее формула выведена Гауссом [2]:

$$K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. (6.16)$$

Согласно теореме Эйлера [4, § 7.24], средняя кривизна есть

$$H = \frac{1}{2}(k_{\max \min}). (6.17)$$

Из (6.15) и (6.17) находим, что

$$k\sqrt{H^2 - K} \min_{\max}. (6.18)$$

где знак «+» относится к  $k_{\max}$ , а знак «-» к  $k_{\min}$ . Эти четыре кривизны из дифференциальной геометрии поверхностей [5] определены во всех точках  $S$ .

Гаусс [2] доказал **Teorema egregium** (что означает «выдающаяся теорема»), согласно которой полная гауссова кривизна  $K$  не меняется при любом изгибании поверхности, не меняющем длины кривых на ней. Такое изгибание должно происходить без смятия и разрыва поверхности.

$$M = \sqrt{\frac{\left( r \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}} - t \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} \right)^2 (1+p^2+q^2) + \left( pqr \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}} - 2s\sqrt{(1+q^2)(1+p^2)} + pqt \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} \right)^2}{4(1+p^2+q^2)^3}}. (6.22)$$

Несферичность равна нулю на участке сферы любого радиуса, увеличиваясь на вытянутых формах поверхности, таких как килевые или гребневые формы.

**Ротор** определен в работе [7] как кривизна линии тока. Для вывода его формулы можно определить кривизну линии тока  $|r''_{\sigma}|$  и сравнить ее

$$\frac{dp}{d\sigma} = r \frac{dx}{d\sigma} + s \frac{dy}{d\sigma} = -\frac{pr+qs}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{dq}{d\sigma} = s \frac{dx}{d\sigma} + t \frac{dy}{d\sigma} = -\frac{ps+qt}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

на  $N$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\sigma^2} &= -\frac{(pr+qs) + \frac{p\left(p\frac{dp}{d\sigma} + q\frac{dq}{d\sigma}\right)}{\sqrt{p^2+q^2}}}{p^2+q^2} = \\ &= \frac{pq^2(r-t) - qs(p^2+q^2)}{(p^2+q^2)^2} = \left(\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \frac{(p^2-q^2)s - pq(r-t)}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}}; (6.23) \end{aligned}$$

аналогично,

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = \frac{ps(p^2-q^2) - p^2q(r-t)}{(p^2+q^2)^2} = \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \frac{(p^2-q^2)s - pq(r-t)}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}} (6.24)$$

на  $N$ . Сравнивая (6.23), (6.24) и формулу (4.4)  $r'_{\xi} = \pm(-qi + pj)/\sqrt{p^2+q^2}$  для единичного вектора горизонтали, находим

Однако, далеко не все поверхности можно так изогнуть, скорее частные поверхности вроде конуса, поэтому эта теорема относится прежде всего к неизменности  $K$  при разворачивании конуса или цилиндра на плоскость для многих обычных в картографии проекций.

**Несферичность**  $M$  есть кривизна, определенная в работе [33] как

$$M = \frac{1}{2}(k \min_{\max}). (6.19)$$

Из (6.18) и (6.19) следует, что

$$M = \sqrt{H^2 - K}. (6.20)$$

Вместе с  $H$  и  $K$  величина  $M$  определена во всех точках  $S$ . Выразить  $M$  через производные можно, подставив в формулу (6.20) выражения (6.11) для  $H$  и (6.16) для  $K$ :

$$M = \sqrt{\frac{[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2}{4(1+p^2+q^2)^3} - \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}}. (6.21)$$

В таком виде формула может быть неудобна для расчетов, поскольку знак под корнем из-за ошибок округления может стать отрицательным. Поскольку  $M$  неотрицательна, выражение под корнем можно привести к сумме квадратов. Опуская простые, но громоздкие расчеты, дадим окончательную формулу:

с  $rot r'_{\sigma}$ , где  $r'_{\sigma}$  есть единичный вектор касательной к линии тока, определенный формулой (4.5). Из (4.5) следует, что

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{dy}{d\sigma} = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

на  $N$ . Поэтому

$$r''_{\sigma} = \pm \frac{(p^2 - q^2)s - pq(r - t)}{\sqrt{(p^2 + q^2)^3}} r'_{\xi}$$



на  $N$ . Знак зависит от ориентации горизонтали. Отсюда следует, что модуль кривизны линии тока есть

$$|r''_{\sigma}| = \frac{|(p^2-q^2)s-pq(r-t)|}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}} \quad (6.25)$$

на  $N$ . Для того, чтобы разобраться в смысле знака ротора, заметим, что в математике ротор есть вектор с компонентами [4, §13.11]

$$(rot r'_{\sigma})_z = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right) \right] = - \frac{(p^2-q^2)s-pq(r-t)}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}}$$

Сравнивая этот результат и (6.25), видим, что на  $N$   $(rot r'_{\sigma})_z = \pm |r''_{\sigma}|$ .

По смыслу ротора, в правой системе координат линия тока поворачивает по часовой стрелке, если  $z$ -компонента отрицательна. Поэтому выбор знака для скалярного ротора  $rot$  противоположен  $z$ -компоненте вектора  $(rot r'_{\sigma})_z$ . Следовательно, линия тока поворачивает по часовой стрелке, когда  $rot$  положителен и против часовой стрелки в противоположном случае. Окончательно,

$$rot = \frac{(p^2-q^2)s-pq(r-t)}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}} \quad (6.26)$$

на  $N$ . Отметим, что  $rot r'_{\sigma}$  есть аксиальный вектор и потому положительный знак  $rot$  отвечает повороту линии тока по часовой стрелке только в правой системе координат, которая практически всегда и используется в науках о Земле.

Модуль  $|rot|$  описывает расчлененность (изрезанность) рельефа, а знак  $rot$  отвечает направлению закручивания линий тока.

**Разностная кривизна  $E$**  определена в [33] как

$$E = \frac{1}{2} (k_v - k_h) \quad (6.27)$$

на  $N$ . Используя формулу (6.10), находим, что  $k_v = 2H - k_h$  и  $E = H - k_h$ . Отсюда и из формул (6.11) и (6.9) для  $H$  и  $k_h$  находим, что на  $N$

$$E = \frac{q^2r-2pqs+p^2t}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} \quad (6.28)$$

Из (6.27) и (6.10) следует, что

$$k_v = H + E, \quad (6.29)$$

$$k_h = H - E \quad (6.30)$$

на  $N$ . Из (6.17) и (6.19) следует, что во всех точках поверхности

$$k_{max}, \quad (6.31)$$

$$k_{min}. \quad (6.32)$$

Согласно последним двум формулам и определению  $K = k_{min}k_{max}$ ,

$$K = H^2 - M^2. \quad (6.33)$$

$$rot \ a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Подставляя сюда компоненты  $r'_{\sigma}$  из (4.5) вместо  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ , и учитывая, что  $a_z = 0$ , находим для  $z$ -компоненты  $rot r'_{\sigma}$  на  $N$ :

Рассмотрим связь между разностной кривизной  $E$  и несферичностью  $M$ . По теореме Эйлера [4, §7.24], кривизна  $k$  нормального сечения, повернутого на угол  $\varphi$  от главного нормального сечения с кривизной  $k_{max}$ , есть функция  $k_{max}$ ,  $k_{min}$  и  $\varphi$ :

$$k(\varphi) = k \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi_{min_{max}}$$

Пусть  $\theta$  есть наименьший угол между вертикальной плоскостью нормального сечения с кривизной  $k_v$  (в которой лежит линия скольжения) и нормальным сечением для  $k_{max}$ . По теореме 2 плоскость нормального сечения с кривизной  $k_h$  ортогональна плоскости нормального сечения с кривизной  $k_v$ , то есть  $k_h = k(\theta + \pi/2)$ . Отсюда и из теоремы Эйлера следует, что

$$k_v = k \cos^2 \theta \sin^2 \theta_{min_{max}}, \quad (6.34)$$

$$k_h = k \cos^2 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)_{min_{max}}$$

Последнюю формулу можно преобразовать следующим образом:

$$k_h = k \sin^2 \theta \cos^2 \theta_{min_{max}}, \quad (6.35)$$

Вычитая (6.35) из (6.34), получаем

$$\begin{aligned} k_v - k_h &= k \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta_{min_{max}} \\ &= (k \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos 2 \theta)_{min_{max}} \end{aligned}$$

Отсюда и из определений  $M$  и  $E$  следует, что на  $N$

$$E = M \cos 2 \theta, \quad (6.36)$$

откуда

$$|E| \leq M. \quad (6.37)$$

**Горизонтальная и вертикальная избыточные кривизны,  $k_{he}$  и  $k_{ve}$ ,** определены в [33] на  $N$  как

$$k_{he} = k_h - k_{min}, \quad (6.38)$$

$$k_{ve} = k_v - k_{min}. \quad (6.39)$$

Эти величины неотрицательны, поскольку  $k_{\min}$  не больше кривизны любого другого нормального сечения в той же точке поверхности  $S$ . Используя эти определения и формулы (6.29–6.32), получаем, что на  $N$

$$k_{ve} = M + E, (6.40)$$

$$k_{he} = M - E. (6.41)$$

**Полная кольцевая кривизна**  $K_r$  определена в [33] как произведение  $k_{he}$  на  $k_{ve}$ . Из (6.40) и (6.41) следует, что

$$K_r = \frac{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t](q^2r-2pqs+p^2t)}{(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)^2} - \frac{(q^2r-2pqs+p^2t)^2}{(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)} - \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

После простых, но громоздких преобразований получаем окончательно

$$K_r = \left( \frac{(p^2-q^2)s-pq(r-t)}{(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)} \right)^2 (6.43)$$

на  $N$ . Сравнивая этот результат с формулой ротора (6.26), находим

$$K_r = \frac{G^2}{(1+G^2)^2} rot^2 (6.44)$$

на  $N$ , так что полная кольцевая кривизна пропорциональна  $rot^2$  с положительным на  $N$  множителем, зависящим только от крутизны  $G$ . Поскольку  $|rot|$  есть кривизна линий тока,  $K_r$  описывает извилистость линий тока (одну из характеристик расчлененности, изрезанности местности), но в отличие от ротора,  $K_r$  не учитывает направления поворота линий тока.

Для полной кривизны (произведения двух кривизн) характерно появление новых свойств, не присущих взятым порознь сомножителям. Для полной гауссовой кривизны  $K = k_{\min}k_{\max}$  это доказано в отмеченной выше **Теорема egregium** Гаусса. Для  $K_r$  это описывает следующая

**Теорема 6.** [33]. На любом подмножестве  $N$ , где высота может быть выражена как функция  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ , полная кольцевая кривизна  $K_r$  равна нулю.

**Доказательство.** Пусть  $\rho, \varphi$  есть полярные координаты с полюсом в данной точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда высота  $z(x, y) = z(\rho)$ . Для этой функции

$$E = -\frac{R-\frac{P}{\rho}(1+P^2)}{2\sqrt{(1+P^2)^3}}, M = \frac{\left| R-\frac{P}{\rho}(1+P^2) \right|}{2\sqrt{(1+P^2)^3}},$$

где  $R = d^2z/d\rho^2$ ,  $P = dz/d\rho$ . Отсюда следует, что  $M = |E|$ . Поэтому, согласно (6.42),  $K_r = M^2 - E^2 = 0$  на  $N$ . Теорема доказана.

Таким образом, новое свойство  $K_r$  состоит в том, что на радиально симметричных формах поверхности  $K_r$  обращается в ноль. Это и объясняет название  $K_r$ .

**Полная аккумуляционная кривизна**  $K_a$ , определена на  $N$  [33] как произведение

$$K_r = M^2 - E^2 (6.42)$$

на  $N$ . Используя эту формулу вместе с (6.20) и (6.30), находим, что

$$K_r = 2Hk_h - k_h^2 - K,$$

и подставляя сюда формулы для  $H$ ,  $k_h$  и  $K$ , получаем:

$$K_a = k_h k_v. (6.45)$$

Используя формулы (6.9) и (6.12) для  $k_h$  и  $k_v$ , получаем на  $N$

$$K_a = \frac{(q^2r-2pqs+p^2t)(p^2r+2pqs+q^2t)}{(p^2+q^2)^2(1+p^2+q^2)^2}. (6.46)$$

Используя формулы (6.29) и (6.30), получаем на  $N$ :

$$K_a = H^2 - E^2. (6.47)$$

Новые свойства  $K_a$  описывает следующая **Теорема 7.** [33]. На любом подмножестве  $N$ , где высота  $z$  может быть выражена как функция полярного угла  $\varphi$  с полюсом в некоторой точке  $(x_0, y_0)$ , полная аккумуляционная кривизна равна нулю.

**Доказательство.** В этом случае  $z(x, y) = z(\varphi)$ . Для этой функции

$$H = E = \frac{-T}{2\rho^2\sqrt{[(1+Q^2)/\rho^2]^3}},$$

где  $T = \frac{d^2z}{d\varphi^2}$ ,  $Q = \frac{dz}{d\varphi}$ . Из (6.47) и  $H = E$  следует, что  $K_a = H^2 - E^2 = 0$  на  $N$ . Теорема доказана.

Связь полных кривизн  $K$ ,  $K_r$  и  $K_a$  устанавливает следующая

**Теорема 8.** [33].  $K_a = K + K_r$  на  $N$ .

**Доказательство.** Выше было доказано, что  $K_a = H^2 - E^2$ ,  $K = H^2 - M^2$  и  $K_r = M^2 - E^2$  на  $N$ . Формула  $K_a = K + K_r$  непосредственно следует из этих формул. Теорема доказана.

Поверхность  $S$  двумерна и для ее описания, казалось бы, достаточно двух независимых кривизн. Однако гравитационное поле как бы добавляет «третье измерение» [21]. В качестве независимых величин поэтому можно взять три кривизны:  $H$ ,  $M$  и  $E$ . Из них первые две не зависят от поля, а все эффекты гравитации содержит третья. Тогда большинство описанных выше кривизн очень просто выражается через эти три, как показано в таблице.

Таблица.

Связи между кривизнами.

| Простые кривизны, в 1/м |                  | Полные кривизны, в 1/м <sup>2</sup> |
|-------------------------|------------------|-------------------------------------|
| $k_{\max} = H + M$      | $k_h = H - E$    | $K = H^2 - M^2$                     |
| $k_{\min} = H - M$      | $k_{ve} = M + E$ | $K_a = H^2 - E^2$                   |
| $k_v = H + E$           | $k_{he} = M - E$ | $K_r = M^2 - E^2$                   |

Все формулы этой таблицы уже выведены выше. В таблицу не вошла плановая кривизна  $k_p$ , но она дублирует горизонтальную кривизну  $k_h$  тем, что ее знак совпадает с  $k_h$  на  $N$ . Здесь также явно нет ротора, но выше показано (6.44), что его квадрату пропорциональна полная кольцевая кривизна  $K_r$ . Лапласиан высоты тоже не вошел сюда, но он пропорционален средней кривизне (теорема 5).

Можно считать описанную систему кривизн полной в том смысле, что алгебраическая сумма любых двух независимых кривизн  $H$ ,  $E$ ,  $M$  дает кривизну той же системы, а разность их квадратов

дает полные кривизны. В то же время каждая кривизна имеет свой специфический смысл, как описано выше.

### 7. Применение локальных морфометрических величин в науках о Земле

Согласно изложенному, два основных механизма аккумуляции описываются знаками горизонтальной кривизны и вертикальной кривизны. Поэтому Трех [37] предложил классификацию форм рельефа по знакам этих кривизн, рис. 5А.

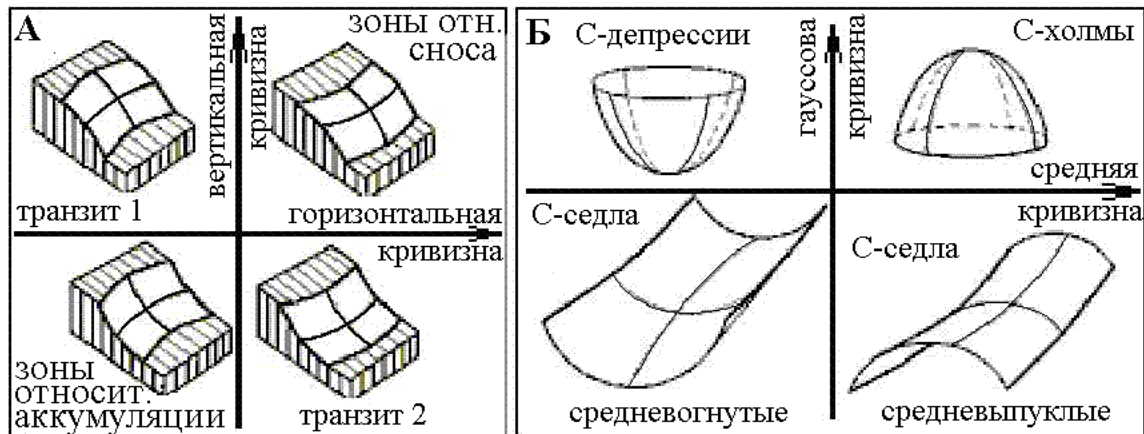


Рис. 5. Классификации форм рельефа (А) Треха [37] и (Б) Гаусса [2].

Классификация Треха использует свойства потоков (линий тока и линий скольжения), то есть зависит от гравитации. Не зависящую от внешних полей классификацию форм рельефа предложил Гаусс [2], рис. 5Б. Были предложены и другие классификации (см. обзор [24]), но их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы. Здесь отметим лишь интересное свойство классификаций по знакам кривизн, заключающееся в том, что площади, занимаемые этими классами, могут быть заранее оценены (приблизительно) для любой местности [33]. Например, примерно две трети площади любой местности занимают седловины Гаусса. В отличие от этого, характеристики нелокальных форм рельефа, таких как холмы и депрессии, меняются в очень широких пределах, зависящих от специфики местности. Так, отношение объемов холмов к объемам депрессий меняется от 0,6 для местности с глубоководными озерами до 10000 для горной области [35].

Для расчета МВ обычно используют цифровые модели рельефа в виде матриц [16]. Многочисленные приложения рассмотренных выше морфометрических величин (МВ) в экологии, почвоведении, геоморфологии и сельском хозяйстве основаны на статистическом сравнении

данной характеристики ландшафта (свойства почв, растительности и т.п.) с рельефом (и/или климатом) путем использования множественной регрессии или других подобных методов. Это направление получило широкую известность как предсказательное картирование (или моделирование). Обзоры включают в себя [18] в экологии, [32] в почвоведении и [14] в геоморфологии. Ясно, например, что если данная характеристика почв тесно связана с рельефом, то ее можно предсказывать прямо по рельефу. Суть предсказательного картирования заключается в том, что измеренные в точках наблюдения значения характеристики ландшафта статистически сравниваются со значениями факторов среды, таких как МВ и/или характеристики климата. Полученное уравнение (регрессии) может затем использоваться для построения предсказательной карты, интерполирующей и экстраполирующей изучаемую характеристику ландшафта по рельефу и/или климату. Кроме того, оценивается теснота связи этой характеристики ландшафта с факторами среды и выявляются наиболее значимые из последних. Отметим, однако, что предсказательная модель, составленная для одной местности, редко подходит для другой [18].

Для биотических свойств почв (таких как содержание углерода) в списке ведущих факторов среды нередко оказывается освещенность склонов [12], поскольку с ней связаны фотосинтез и тепловой режим почв, а для абиотических (таких как концентрации тяжелых металлов) она обычно не столь важна, и важнее бывают другие МВ, характеризующие механизмы аккумуляции или формы рельефа [10].

Интегрирование движения Солнца за данное время (например, за вегетационный период) дает вместо освещенности склонов  $\tilde{F}(\theta, \psi)$  в Вт/м<sup>2</sup> дозу солнечной радиации  $PRR$  (Potential Relative Radiation) в Дж/м<sup>2</sup>, не зависящую от углов  $\theta$  и  $\psi$  [28]. Однако при этом становится важна роль атмосферы, поскольку в ясный день излучение от Солнца при его положении на горизонте в 34 раза меньше, чем от Солнца в зените [3]. Поскольку в модели [28] не учитывается атмосфера, в картах дозы солнечной радиации  $PRR$  роль утренних и вечерних часов преувеличена.

С другой стороны, из-за задержки проникновения тепла в почву наибольший прогрев корнеобитаемого слоя почвы в Северном полушарии отвечает обычно не южным, а юго-западным склонам [13], для которых азимут  $\theta$  лежит между 210° и 240°. Значение  $\theta$  можно найти, построив график зависимости от  $\theta$  коэффициента корреляции  $r$  между изучаемой характеристикой ландшафта и  $F(\theta, \psi)$ . Максимум  $r$  дает «эффективный азимут»  $\theta_0$ , для которого  $F(\theta_0, \psi)$  наиболее сильно влияет на данную характеристику ландшафта (например, обилие трав). Коэффициент корреляции между  $F$  и обилием трав очень слабо зависит от угла склонения  $\psi$  в наиболее важном интервале 25–45°, поэтому в средних широтах можно полагать  $\psi_0 = 35^\circ$  [8]. Возможности оценить эффективные азимут и склонение для оценки теплового режима склонов нет для дозы солнечной радиации  $PRR$  (так как она не зависит от  $\theta$  и  $\psi$ ), поэтому  $PRR$  выделяет склоны, получающие наибольшее количество света (южные в Северном полушарии), а не наиболее теплые (юго-западные). Поэтому использование  $F(\theta_0, \psi_0)$  или  $\tilde{F}(\theta_0, \psi_0)$  в предсказательном картировании удобнее, чем  $PRR$ . Например, усредненная по годам урожайность озимой пшеницы в Окском бассейне была наибольшей для  $F(235^\circ, 35^\circ)$ , а эта освещенность для нее – наиболее значимым фактором среды [9], возрастание которого на 5% приводило к увеличению урожайности примерно в 2 раза.

Иногда для простоты вместо освещенности используют равную 1 для юго-западных склонов функцию экспозиции  $-\sin(A_0+45^\circ)$  [13, 19], которая, по сути, заранее предполагает юго-западные склоны самыми теплыми. Однако они не всегда наиболее теплые по многим причинам, например, из-за преобладания ветров определенного направления. Отметим, что саму экспозицию  $A_0$  некорректно использовать в статистических сравнениях из-за ее цикличности (0° и 360° означают одно и то же – северные склоны), поэтому

вместо  $A_0$  используют нециклические функции экспозиции, такие как  $\sin A_0$  («восточность» склонов) и  $\cos A_0$  («северность» склонов). К примеру, в тайге близ р. Печоры отрицательная связь обилия таёжной растительности с  $\sin A_0$  отвечала негативному влиянию преобладающих здесь холодных ветров с востока [11].

Расчлененность (изрезанность) рельефа в геоморфологии считают одной из его важных характеристик [16]. Расчлененность характеризуется избыточными горизонтальной и вертикальной кривизнами  $k_{he}$  и  $k_{ve}$ , их произведением  $K_r$  и отчасти – ротором  $rot$ . Хотя  $|rot|$  отвечает кривизне линий тока, то есть характеризует расчлененность, его знак описывает направление поворота линий тока, поэтому его применение пока ограничено, хотя ясно, что знак  $rot$  может различать левые ( $rot < 0$ ) и правые ( $rot > 0$ ) борта долин.

Крупным масштабам отвечает высокое разрешение, то есть малый размер  $w$  элемента матрицы на местности. Для гладкой поверхности локальные МВ стремились бы к предельным значениям при  $w \rightarrow 0$ . На самом деле этого не наблюдается, и поэтому нет оснований искать пределы (то есть точные значения МВ), рассматривая земную поверхность как гладкую [36]. Эмпирическое исследование [30] показало, что длина побережья Англии (то есть горизонтали) при  $w \rightarrow 0$  скорее неограниченно возрастает, чем стремится к свойственному гладкой поверхности пределу.

Поэтому расчет матриц (и карт) локальных МВ ведется методом конечных разностей (см. [34]). Полагают, что каждому процессу или явлению на земной поверхности отвечает определенный характерный размер, поэтому шаг решетки  $w$  эмпирически подбирают под конкретную задачу (иногда используют набор значений  $w$  для получения «масштабно-независимых» результатов). Эмпирически показано, что среднее по местности значение крутизны уменьшается с ростом  $w$  [17, 34]. Эмпирический анализ указывает также на то, что некоторые нелокальные характеристики рельефа, такие как площадь депрессии, могут иметь предел при  $w \rightarrow 0$  [35].

Поскольку пределы локальных МВ при  $w \rightarrow 0$  не обнаруживаются, за их зависимость от масштаба приходится «платить» неустранимой зависимостью их от  $w$  [34]. В вопросе о том, при каком  $w$  МВ является «правильной», мало смысла без указания контекста задачи (как и в вопросе о «правильном» размере физической точки – он может быть от молекулы до Земли, лишь бы он был много меньше остальных характерных размеров задачи), и зависящая от  $w$  характеристика ландшафта обычно эмпирически определяется характерными размерами лежащих в основе процессов или явлений. Например, для водной эрозии почв предпочтительны  $w \sim 5\text{--}10$  м, хотя для получения менее точных результатов (но на больших площадях) используют  $w = 30$  м [27].

## Список литературы

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Изд.3-е. М.: Наука, 1976. 320 с.
2. Гаусс К.Ф. (1828) Общие исследования о кривых поверхностях // Об основаниях геометрии. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. С. 123-161.
3. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Изд.2-е. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 752 с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2-х томах. М.: Наука, 1975. 840 с.
5. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
6. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 321 с.
7. Шарый П.А. Топографический метод вторых производных // Геометрия структур земной поверхности. Пушино: ПНЦ АН СССР, 1991. С. 28-58.
8. Шарый П.А., Рухович О.В., Шарая Л.С. Методология анализа пространственной изменчивости характеристик урожайности пшеницы в зависимости от условий агроландшафта // Агрохимия. 2011. № 2. С. 57-81.
9. Шарый П.А., Рухович О.В., Шарая Л.С. Предсказательное моделирование характеристик урожая озимой пшеницы // Цифровая почвенная картография: теоретические и экспериментальные исследования. М.: Почвенный институт им. В.В. Докучаева, 2012. С. 310-326.
10. Шарый П.А., Пинский Д.Л. Статистическая оценка связи пространственной изменчивости содержания органического углерода в серой лесной почве с плотностью, концентрацией металлов и рельефом // Почвоведение. 2013. № 11. С. 1344-1356.
11. Шарый П.А., Смирнов Н.С. Механизмы влияния солнечной радиации и анизотропии местности на растительность темнохвойных лесов Печоро-Ильчского заповедника // Экология. 2013. № 1. С. 11-19.
12. Шарый П.А., Шарая Л.С., Иванова А.В., Костина Н.В., Розенберг Г.С. Сравнительный анализ видового богатства жизненных форм сосудистых растений в Среднем Поволжье // Сибирский экологический журнал. 2019. № 4. С. 383-396.
13. Beers T.W., Dress P.E., Wensel L.C. Aspect transformation in site productivity research // Journal of Forestry. 1966. V. 64. P. 691-692.
14. Bishop M.P., James L.A., Shroder Jr. J.F., Walsh S.J. Geospatial technologies and digital geomorphological mapping: Concepts, issues and research // Geomorphology. 2012. V. 137. P. 5-26.
15. Cayley A. On contour and slope lines // Philosophical Magazine. 1859. Series 4. V. 18. N. 120. P. 264-268.
16. Evans I.S. General geomorphometry, derivatives of altitude, and descriptive statistics // Chorley R.J. (Ed.) Spatial Analysis in Geomorphology. London: Methuen & Co., Ltd., 1972. Ch. 2. P. 17-90.
17. Evans I.S. The effect of resolution on gradients calculated from an altitude matrix / Report 3 on Grant DA-ERO-591-73-G0040, 'Statistical characterization of altitude matrices by computer' (Appendix: Stationarity). Durham, England: Department of Geography, University of Durham, 1975. 24 p.
18. Guisan A., Zimmermann N.E. Predictive habitat distribution models in ecology // Ecological Modelling. 2000. V. 135. N. 2-3. P. 147-186.
19. Hwang T., Song C., Vose J.M., Band L.E. Topography-mediated controls on local vegetation phenology estimated from MODIS vegetation index // Landscape Ecology. 2011. V. 26. P. 541-556.
20. Jenčo M., Pacina J., Shary P.A. Terrain skeleton and local morphometric variables: geosciences and computer vision technique // Horák J., Halounová L., Kusendová D., Rapant P., Voženílek V. (Eds.) Advances in Geoinformation Technologies. Ostrava: VŠB - Technical University of Ostrava, 2009. Chapter 5. P. 57-76.
21. Koenderink J.J., van Doorn A.J. Two-plus-one-dimensional differential geometry // Pattern Recognition Letters. 1994. V. 15. N. 5. P. 439-443.
22. Krcho J. Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspect of field theory // Acta Geographica Univ. Comeniana, Geographico-Physica. 1973. N. 1. P. 7-233.
23. Krcho J. Teoretická koncepcia a interdisciplinárne aplikácie komplexného digitálneho modelu reliéfu pri modelovaní dvojdimenzionálnych poli // Geografický časopis. 1983. V. 35. N. 3. P. 265-291.
24. MacMillan R.A., Shary P.A. Landforms and landform elements in geomorphometry // Hengl T., Reuter H.I. (Eds.) Geomorphometry: Concepts, Software, Applications. Developments in Soil Science, Volume 33. Amsterdam, etc.: Elsevier, 2009. Chapter 9. P. 227-254.
25. Minár J., Jenčo M., Evans I.S., Minár Jr. J., Kadlec M., Krcho J., Benová A., Pacina J. Third-order geomorphometric variables (derivatives): definition, computation and utilization of changes of curvatures // International Journal of Geographical Information Science. 2013. V. 27. N. 7. P. 1381-1402.
26. Mitašová H., Hofierka J. Interpolation by regularized spline with tension. II. Application to terrain modeling and surface geometry analysis // Mathematical Geology. 1993. V. 25. N. 6. P. 657-669.
27. Mitašová H., Hofierka J., Zlocha M., Iverson R.L. Modeling topographic potential for erosion and deposition using GIS // International Journal of Geographical Information Science. 1996. V. 10. N. 5. P. 629-641.
28. Pierce Jr. K.B., Lookingbill T., Urban D. A simple method for estimating potential relative radiation (PRR) for landscape-scale vegetation analysis // Landscape Ecology. 2005. V. 20. N. 2. P. 137-147.
29. Pike R.J., Evans I.S., Hengl T. Geomorphometry: a brief guide // Hengl T., Reuter H.I. (Eds.) Geomorphometry: Concepts, Software,

Applications. Developments in Soil Science, Volume 33. Amsterdam etc.: Elsevier, 2009. Chapter 1. P. 3-30.

30. Richardson L. The problem of contiguity: An appendix to statistics of deadly quarrels // Yearbook of the Society for General Systems Research. Vol. 6. Michigan: Ann Arbor, 1961. P. 140-187.

31. Sard A. The measure of the critical values of differentiable maps // Bulletin of American Mathematical Society. 1942. V. 48. N. 2. P. 883-890.

32. Scull P., Franklin J., Chadwick O.A., McArthur D. Predictive soil mapping: a review // Progress in Physical Geography. 2003. V. 27. N. 2. P. 171-197.

33. Shary P.A. Land surface in gravity points classification by a complete system of curvatures // Mathematical Geology. 1995. V. 27. N. 3. P. 373-390.

34. Shary P.A., Sharaya L.S., Mitusov A.V. Fundamental quantitative methods of land surface analysis // Geoderma. 2002. V. 107. N. 1-2. P. 1-32.

35. Shary P.A., Sharaya L.S., Mitusov A.V. The problem of scale-specific and scale-free approaches in geomorphometry // Geografia Fisica e Dinamica Quaternaria. 2005. V. 28. N. 1. P. 81-101.

36. Shary P.A. Models of topography // Zhou Q., Lees B., Tang G. (Eds.) Advances in Digital Terrain Analysis. Lecture Notes in Geoinformation and Cartography, XIV. Berlin, etc.: Springer-Verlag, 2008. P. 29-57.

37. Troeh F.R. Landform parameters correlated to soil drainage // Soil Science Society of America Proceedings. 1964. V. 28. N. 6. P. 808-812.