

Рисунок 6- Значения  $E_n$ , в зависимости от дозы для двух участников МСИ.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведена 4-ая МСИ лабораторий ИДК АЭС АО «Концерн «Росэнергоатом». 11 участников предоставили протоколы с результатами измерения в установленном виде. ООО «АПИ» выполнен статистический анализ результатов по величине  $E_n$ . У всех участников данная величина ниже критической 1, что говорит об удовлетворительной характеристике функционирования лаборатории.

Работа выполнялась в рамках договора между ООО «АтомПромИнжиниринг» и АО Концерном «Росэнергоатом», при участии Генерального директора А.Ю.Соколова. Отдельная благодарность Сабурову В. (МРНЦ им. А.Ф. Цыба, г.Обнинск) за измерения и облучение дозиметров, В.А.Берлянду (ВНИИФТРИ) за облучение ТЛД на Первичном Государственном эталоне, О.В.Кирюхину (МГУ) за обработку ТЛД.

### ССЫЛКИ

1.ГОСТ ISO/IEC 17025-2019. /Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий.

2.Комментарий Генерального директора А.Н. Макаренко //https://ecologixlab.ru/wp-content/uploads/2021/12/oficialnyj-kommentarij.pdf «Научно-Технический Центр «ЭкоЛоджиксЛаб»

https://ecologixlab.ru/organizacziya-mezhlaboratornyh-slichitelnyh-ispytanij/

3.Программы проверки квалификации лабораторий/ http://ptp.fsa.gov.ru/

4.А.Г.Алексеев, П.Ф.Масляев, В.Н.Лебедев и др. «Сличение индивидуальных дозиметров фотонного излучения (COMPAR-98). Препринт ИФВЭ №1. 2000. // http://web.ihep.su/library/pubs/prep2000/ps/2000-1.pdf

5.А.Г.Алексеев, Ю.В.Быстров, Н.Н.Бараненков, В.Е.Косьяненко, И.В.Долженков / «Тест-сличение средств измерения индивидуального дозиметрического контроля АЭС концерна Росэнергоатом»/ АНРИ №3, 2002, стр. 15-20.

6.Алексеев А. Г., Берлянд В. А./Сличение средств индивидуальных дозиметров для проверки лаборатории радиационного контроля» /Журнал «Евразийский Союз Ученых (ЕСУ») #6(63), 2019 / DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.63.154

7.ГОСТ ISO/IEC 17043-2013 «Оценка соответствия. Основные требования к проведению проверки квалификации».

8.ГОСТ Р ИСО 13528- 2010 /Статистические методы применение при экспериментальной проверке компетентности посредством межлабораторных сравнительных испытаний.

УДК 624.13

---

**РАСЧЕТ БАЛОК И ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.**

---

*Александр Валентинович Лебедев*

*к.т.н., доцент кафедры «Строительной механики»*

*С.-Пб. Государственный архитектурно-строительный университет,  
190005, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская д.4*

**ANALYSIS OF BEAMS AND SLABS ON AN ELASTIC FOUNDATION BY THE FINITE ELEMENT METHOD USING AN ELASTIC HALF-SPACE MODEL.**

*A.V. Lebedev*

*PhD, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics*

*S.-Pb. State University of Architecture and Civil Engineering,*

*190005, Russia, St. Petersburg, St. 2nd Krasnoarmeiskaya, 4,*

*DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2022.1.94.1613*

**АННОТАЦИЯ**

Рассматривается задача расчета конструкций на упругом основании методом конечных элементов в форме смешанного метода. Предлагается способ определения реакций упругого основания в матрице упругих свойств конечного элемента по методике Б.Н. Жемочкина. В качестве модели упругого основания используется классическая модель упругого полупространства. Предлагаемая методика реализована в программе Mathcad для расчета балки на упругом основании. Приводится пример расчета и сравнение с результатами полученными другими методами.

**ABSTRACTS**

The problem of analysis of structures on an elastic foundation by the finite element method in the form of a mixed method is considered. A method is proposed for finding the reactions of an elastic foundation in the matrix of elastic properties of a finite element according to the method of B.N. Zhemochkin. The classical model of an elastic half-space is used as a model of an elastic foundation. The proposed technique is implemented in the Mathcad program for calculating a beam on an elastic foundation. An example of analysis and comparison with the results obtained by other methods is given.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, смешанный метод, метод Б.Н. Жемочкина, упругое основание, балки, плиты, Mathcad

**Key words:** finite element method, mixed method, B.N. Zhemochkin, elastic foundation, beams, slabs, Mathcad.

**Введение.**

При решении задач расчета конструкций на упругом основании в распространенных вычислительных программах, реализующих метод конечных элементов (SCAD, LIRA и др.), для учета упругого основания используются модели, основанные на гипотезах Винклера или Пастернака. Реакции основания в этих моделях определяются при помощи коэффициентов постели, учитывающих работу грунтового основания как в направлении только вертикальных перемещений (гипотеза Винклера), так и распределительную способность грунта (гипотеза Пастернака). Определение величин расчетных коэффициентов или коэффициентов «постели» носит достаточно условный характер и зависит, в частности, как от характеристик самого грунта, так и от методики определения этих величин.

Более адекватными с точки зрения сопротивления материалов и строительной механики характеристиками грунтового основания являются модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта. Использование этих характеристик для учета работы упругого основания базируется на решениях теории упругости. Такой подход использован например в

[1],[2]. Известны также решения с использованием комбинированных моделей упругого основания в которых основной массив грунта считается упругим полупространством на котором расположен слой подчиняющийся гипотезам Винклера или Пастернака [6]. Применение решений теории упругости позволяет в расчетах использовать модуль деформации грунта и коэффициент Пуассона.

**Цель исследования**

Построение конечно-элементного алгоритма расчета балок и плит на упругом основании смешанным методом с использованием модели упругого полупространства.

**Материалы и методы исследования**

При решении задач расчета конструкций на упругом основании методом конечных элементов необходимо вычисление коэффициентов матрицы реакций основания. В случае использования метода перемещений коэффициенты матрицы реакций основания вычисляются аналогично коэффициентам матрицы жесткости на основе функции формы конечного элемента. В смешанном методе реакции основания учитываются лишь для линейных степеней свободы в узлах конечного элемента [3],[4].

Б.Н. Жемочкиным [2], был предложен инженерный метод решения задачи в котором балка на сплошном упругом основании заменяется балкой на упругих опорах. Перемещения и реакции в опорных связях расчетной схемы определяются по формулам теории упругости. Воспользовавшись этой идеей можно построить конечно-элементный алгоритм на основе метода конечных элементов в форме смешанного метода [3,4]. Для определения реакций упругого основания в [3] используется модель Винклера и предполагается распределение реакций основания в пределах конечного элемента по линейному закону в виде треугольной эпюры. Смешанный метод для расчета плит на упругом основании применяется также в [7].

В классической теории упругости известно решение Буссинеска для определения осадок упругого полупространства от сосредоточенной силы:

$$z = \frac{F(1-\mu^2)}{\pi E_0 r} \quad (1)$$

где  $z$  – осадка поверхности полупространства,  $F$  – внешняя сила,  $E_0$ ,  $\mu$  – модуль деформации и коэффициент Пуассона основания,  $r$  – расстояние от точки приложения силы до точки в которой определяется осадка.

Если проводить вычисления по формуле (1), то в точке приложения силы величина осадки будет бесконечной. Этого можно избежать, если заменить сосредоточенную силу распределенной по прямоугольной площадке с размерами ( $b \times c$ ). При этом при расчете балок размер  $b$  принимается равным ширине сечения балки, а  $c$  – расстояние между опорными стержнями в расчетной модели балки на упругих опорах [2].

Заменив сосредоточенную нагрузку распределенной по прямоугольной площадке с размерами ( $b \times c$ ) и взяв бесконечно малый элемент площади получим

$$f \cdot d\zeta d\eta = \frac{F}{b \cdot c} \cdot d\zeta d\eta \quad (2)$$

здесь  $\zeta$  и  $\eta$  координаты в плоскости площадки нагружения.

Подставив (2) в (1):

$$d^2 w = \frac{F}{b \cdot c} \cdot \frac{(1-\mu^2)}{\pi E_0 r} d\zeta d\eta$$

и полная осадка

$$w = \int_{\zeta=x-\frac{c}{2}}^{\zeta=x+\frac{c}{2}} 2 \cdot \int_0^{\eta=\frac{b}{2}} \frac{F}{b \cdot c} \cdot \frac{(1-\mu^2)}{\pi E_0 r} d\zeta d\eta \quad (3)$$

Выполнив интегрирование (3) можно получить выражение для осадки в виде

$$w = \frac{(1-\mu^2)}{\pi E_0 c} \Phi \quad (4)$$

где  $\Phi$  – функция, полученная в результате вычисления интеграла (3), зависящая от значений  $b$ ,  $c$ ,  $x$ . Конечный вид функции  $\Phi$  приведен в [2] где также имеются таблицы значений для разных соотношений параметров  $b$ ,  $c$  и  $x$ , при этом  $x$  представляет собой расстояние от центра загруженной площадки до точки в которой вычисляется осадка.

При использовании метода конечных элементов в форме смешанного метода неизвестными являются реакции в линейных связях и изгибающие моменты в сечениях балки, соответствующих местам установки этих связей. Конечным элементом в этом случае будет элемент в виде шарнирного стержня с двумя моментами в опорных сечениях (рисунок 1). В общем случае могут быть добавлены еще две степени свободы, соответствующие продольным деформациям, которыми при расчете балок обычно пренебрегают, если задача решается в линейной постановке.

Для построения матрицы упругих свойств конечного элемента с учетом упругого основания необходимо определить реакции в линейных связях от единичных перемещений. В случае моделирования основания упругим полупространством определить реакции как это сделано в [3], при использовании модели Винклера, невозможно. Для определения реакций можно воспользоваться формулой (4) предполагая, что величина реакции в связи пропорциональна величине осадки.

Функция  $\Phi$  в (4) приводится в [2] в явном виде, однако наличие современных вычислительных инструментов позволяет легко определить значения этой функции выполнив вычисления непосредственно по формуле (3).

Для определения осадок упругого основания в связях конечного элемента формула (3) примет вид:

$$w(x) = 2 \frac{F}{b \cdot c} \cdot \frac{(1-\mu^2)}{\pi E_0} \int_{le-\frac{c}{2}}^{le+\frac{c}{2}} \int_0^{\eta=\frac{b}{2}} \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}} dy dx \quad (5)$$

где  $y$  и  $x$  оси координат площадки по которой распределяется сила  $F$ ,  $le$  – длина конечного элемента балки.

В отличие от алгоритма описанного в [2] при использовании метода конечных элементов размеры элементов и параметры конечно-элементной модели могут быть выбраны произвольно. Тем не менее, при определении значений осадок упругого основания параметр  $c$  имеет смысл принимать равным ширине поперечного сечения балки. В любом случае линейный размер конечного элемента  $le$  при стандартной разбивке будет больше этого значения, так как в противном случае конечный элемент уже не будет представлять собой стержень.

Рассмотрим балочный конечный элемент смешанного метода (рисунок 1). Для определения коэффициентов матрицы упругих свойств соответствующих линейным смещениям следует последовательно задать единичные перемещения на левом и правом концах элемента. Ограничимся,

как и в [3] учетом реакций упругого основания только от единичных перемещений по направлению вертикальных связей конечного элемента, то есть реакций  $r_{11}$  и  $r_{31}$ .

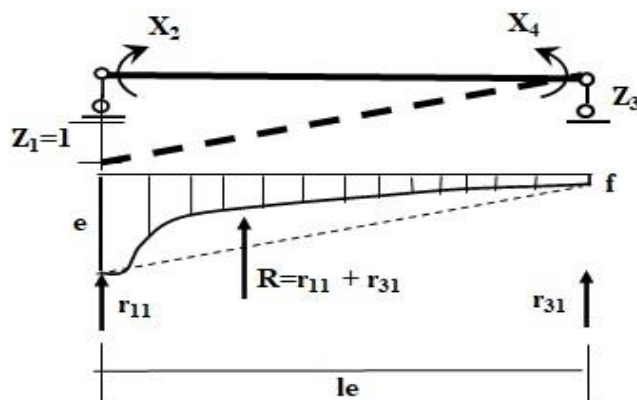


Рисунок 1. Реакции упругого основания в связях конечного элемента.

Сумма реакций  $r_{11}$  и  $r_{31}$  в этих связях должна быть равна равнодействующей давления грунта на длину конечного элемента (рисунок 1).

Функция распределения давлений грунта на рисунке 1 может быть получена по формуле (3), в предположении что величина реакции грунта пропорциональна величине осадки основания. Реакция в связи будет представлять собой величину обратную осадке основания. Равнодействующая  $R$  представляет собой площадь эпюры давлений. Чтобы не вычислять площадь криволинейной эпюры можно разделить её на несколько участков и определить реакцию упругого основания как равнодействующую всех сил. При этом на каждом из участков кривую можно заменить трапецией. Такой же результат можно получить и простым уменьшением длины конечного элемента. Если аппроксимировать кривую давлений в пределах длины конечного элемента трапецией с ординатами  $e$  и  $f$ , то величины реакций  $r_{11}$  и  $r_{31}$  определяются по формулам:

$$r_{11} = \frac{l_e}{6}(2e + f); r_{31} = \frac{l_e}{6}(2f + e), \quad (6)$$

которые легко получить найдя центр тяжести трапеции и составив уравнения равновесия моментов относительно опорных точек.

Подставляя значения реакций в матрицу упругих свойств конечного элемента из [3], получим

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & \frac{1}{l_e} & r_{13} & -\frac{1}{l_e} \\ -\frac{1}{l_e} & \frac{l_e}{3EJ} & \frac{1}{l_e} & \frac{l_e}{6EJ} \\ r_{31} & -\frac{1}{l_e} & r_{33} & \frac{1}{l_e} \\ \frac{1}{l_e} & \frac{l_e}{6EJ} & -\frac{1}{l_e} & \frac{l_e}{3EJ} \end{bmatrix} \quad (7)$$

где  $l_e$  – длина конечного элемента,  $EJ$  – жесткость балки.

Для вычисления значений  $e$  и  $f$  при определении величин реакций удобно использовать Mathcad. При этом реакции вычисляются

следующим образом. Определив значения осадки  $\Delta_{11}$  в точке соответствующей центру загруженной площадки ( $b \times c$ ) считаем ее величину единичным перемещением. Тогда перемещение в точке, соответствующей противоположному концу элемента, будет  $\Delta_{31}/\Delta_{11}$ .

Значения реакций соответствующих этим перемещениям будут равны:

$$e = 1 \cdot \frac{\pi E_0 b c}{(1-\mu^2)}; f = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{11}} \cdot \frac{\pi E_0 b c}{(1-\mu^2)}.$$

Размеры загружаемой площади (или площади в центре которой задается единичное перемещение удобно принимать в виде квадрата со стороной  $b$ , равной ширине поперечного сечения балки. Точность аппроксимации эпюры давлений трапецией будет зависеть от размера конечного элемента.

#### Результаты исследования.

Для оценки состоятельности описываемого подхода приведем результаты расчета. Рассмотрим балку длиной 12м, прямоугольного сечения с размерами  $b = 0.2\text{ м}$ ,  $h = 0.169\text{ м}$ , шарнирно закрепленную по концам и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q = 2\text{ кН/м}$ . Модуль упругости материала балки  $E = 2100000\text{ кН/м}^2$ . Модуль деформации упругого основания  $E_0 = 2000\text{ кН/м}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0.2$ .

Сравним результаты, полученные точным методом начальных параметров [5], методом конечных элементов с предлагаемым вариантом учета упругого основания и расчетами в программном комплексе SCAD. Для корректного сравнения результатов, полученных предлагаемым методом с результатами расчетов вычислениях методом начальных параметров и с использованием программы SCAD в которых используются модели Винклера необходимо определить эквивалентный коэффициент постели. Определению эквивалентного коэффициента постели посвящены работы [2], [8]. Воспользуемся формулой предложенной в [2]:

$$k_{eq} = 0.56E_0^3 \sqrt{\frac{E_0}{EJ}}$$

Расчеты выполнены в системе Mathcad с использованием матриц упругих свойств и жесткости балочных конечных элементов приведенных в [4]. Для оценки полученных результатов вычисления выполнены для двух

вариантов метода конечных элементов в форме метода перемещений и смешанного метода.

Для выбранных величин параметров балки и основания эквивалентный коэффициент постели  $k_{eq} = 2533 \text{ кН/м}^3$ .

Эпюры изгибающих моментов и прогибов полученные предлагаемым методом приведены на рисунках 2,3.

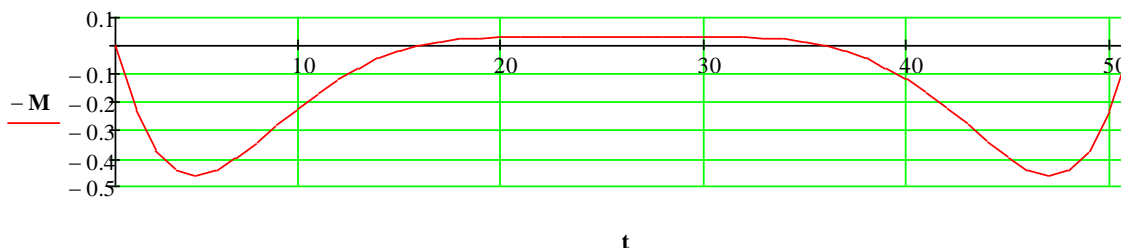


Рисунок 2. Эпюра изгибающих моментов

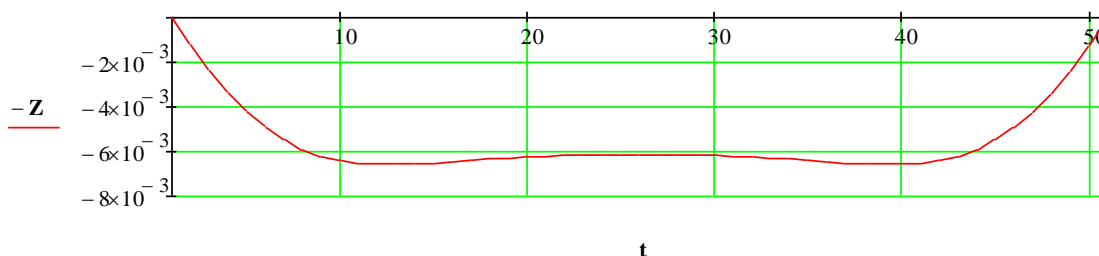


Рисунок 2. Эпюра прогибов

Сравнение результатов в характерных точках, полученных разными способами, приведено в таблице 1.

Таблица 1.

Сравнение результатов расчета балки.

Метод расчета	Изгибающие моменты	перемещения
Метод начальных параметров	0.485 -0.022	7.145 6.68
SCAD	0.473 -0.020	7.130 6.11
Предлагаемый метод (МКЭ смешанный метод)	0.461 -0.029	7.504 6.94
Предлагаемый метод (МКЭ метод перемещений)	0.84 -0.023	2.7 2.7

Некоторое расхождение результатов первых трех строк можно объяснить различием в учете реакций упругого основания в программе SCAD где реализован метод конечных элементов в форме метода перемещений, и реакции упругого основания учитываются как для линейных, так и для угловых перемещений.

В четвертой строке таблицы 1 приведены результаты расчета методом перемещений при учете реакций упругого основания только в линейных связях. Существенное расхождение результатов свидетельствует о том, что в случае использования метода перемещений необходимо учитывать реакции упругого основания возникающие не только в линейных, но и в угловых связях, так как конечный элемент в данном случае представляет собой статически неопределимую балку, в отличие от конечного элемента смешанного метода.

Предложенный способ можно использовать и для расчета плит. В этом случае значения реакций

в связях конечного элемента необходимо вычислять также в направлении второй оси координат в плоскости плиты.

Для конечного элемента плиты, предложенного А.М. Масленниковым [4] с тремя степенями свободы в узле (рисунок 3), матрица упругих свойств будет иметь порядок  $(12 \times 12)$ . Реакции упругого основания как и в случае расчета балок будем учитывать только для линейных перемещений. Тогда формула (4) запишется в виде

$$w(x, y) = 2 \frac{F}{b \cdot c} \cdot \frac{(1-\mu^2)}{\pi E_0} \int_{le-\frac{c}{2}}^{le+\frac{c}{2}} \int_0^{\eta=\frac{b}{2}} \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}} dy dx \quad (8)$$

где значение  $le$  принимается равным размеру конечного элемента в направлении каждой из осей в плоскости плиты в зависимости от того реакция в какой именно связи вычисляется. При этом, если вычисляется реакция, например в связи  $k$  от

единичного перемещения связи  $i$ , то величина  $le$  определяется по формуле:

$$le = \sqrt{le_x^2 + le_y^2}$$

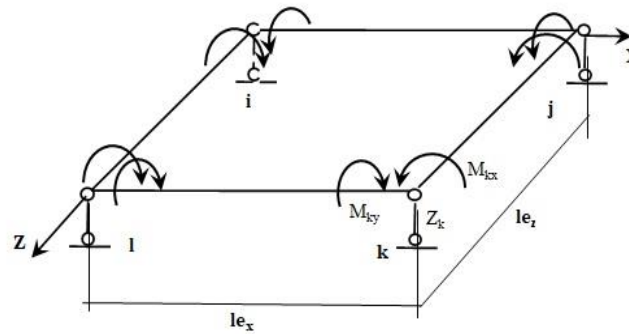


Рисунок 3. Конечный элемент плиты для смешанного метода

По аналогии с балочным конечным элементом вычисленные реакции нормируются по величине реакции в той связи, по направлению которой задается единичное перемещение. В результате получается квадратная симметричная матрица размером  $(12 \times 12)$  с ненулевыми членами, соответствующими линейным связям конечного элемента, которая суммируется с матрицей упругих свойств [4].

**Выводы.** Получено решение задачи расчета балок и плит на упругом основании методом конечных элементов с использованием модели упругого полупространства. Предложенная методика может быть использована для решения сформулированных задач и показывает хорошее совпадение с имеющимися результатами, полученными другими методами. Использование изложенного подхода учета упругого основания также позволяет выполнять расчеты балок и плит на нелинейно-упругом основании обычным шаговым методом.

#### Список цитированных источников.

1. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1984. – 680 с.
2. Б.Н. Жемочкин Расчет балок на упругом полупространстве и полуплоскости. Издание ВИА им.Куйбышева, М., 1937
3. А.М. Масленников Расчет конструкций методом конечных элементов. Куйбышев 1983.
4. А.М. Масленников Приложение метода конечных элементов к расчету строительных конструкций. Ленинград 1978
5. В.А. Киселев Расчет балок на упругом основании. МАДИ, М., 1981
6. Н.Н. Леонтьев, А.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, Н.Н. Анохин Основы теории балок и плит на деформируемом основании. Москва 1982

7. Босаков, С. В. Об одной модели упругого основания и ее использовании для расчета прямоугольной плиты на упругом основании / С. В. Босаков,

С.И. Зиневиц, О. В. Козунова Строительная механика и расчет сооружений. – № 4(279) – М., 2018. – С. 2–5.

8. Peyman Mianji, Ehsan Seyedi Hosseininia A modified method for modelling of spread footing under uniform distributed load using Winkler's model, Sofia, vol. 49 Issue 1 pp. 039-050 (2019)

#### List of cited sources.

1. Gorbunov-Posadov, M.I. Analysis of structures on an elastic foundation /M. I. Gorbunov-Posadov, T. A. Malikova, V. I. Solomin. - 3rd ed., Rev. and add. - M.: Stroyizdat, 1984. -- 680 p.
2. B.N. Zhemochkin Analysis of beams on an elastic half-space and half-plane. Published by the Kuibyshev VIA, M., 1937
3. A.M. Maslennikov Finite element analysis. Kuibyshev 1983.
4. A.M. Maslennikov Application of the finite element method to the analysis of building structures. Leningrad 1978
5. V.A. Kiselev Analysis of beams on an elastic foundation. МАДИ, М., 1981
6. N.N. Leontiev, A.N. Leontiev, D.N. Sobolev, N.N. Anokhin. Fundamentals of the theory of beams and slabs on a deformable foundation. Moscow 1982
7. Bosakov, S. V. On one model of an elastic foundation and its use for calculating a rectangular plate on an elastic foundation / S. V. Bosakov, S.I. Zinevich, O.V. Kozunova Structural mechanics and analysis of constructions. - No. 4 (279) - M., 2018. - P. 2–5.
8. Peyman Mianji, Ehsan Seyedi Hosseininia A modified method for modelling of spread footing under uniform distributed load using Winkler's model, JTAM, Sofia vol. 49 Issue 1 pp. 039-050 (2019)